O Fourierze słów kilka

Piotr Migdał

30 marca 2005

Zdefinujmy transformatę Fouriera (1) oraz odwrotną transformatę Fouriera (2).

$$\tilde{A}(\omega) := \mathcal{F}(A(t)) := \int_{-\infty}^{\infty} d\,t \cdot A(t) \cdot e^{-i\omega t} \tag{1}$$

$$A(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{A}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\,\omega \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \tag{2}$$

Przydać mogą się następujące związki:
1) Skalowanie

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(A(t) \cdot e^{i\omega_0 t}) &= \tilde{A}(\omega - \omega_0) && (3)\\
\mathcal{F}^{-1}(\tilde{A}(\omega) \cdot e^{i\omega t_0}) &= A(t + t_0) && (4)\\
\mathcal{F}(A(\alpha t) &= \frac{1}{\alpha}\tilde{A}(\frac{\omega}{\alpha}) && (5)\\
\mathcal{F}^{-1}(\tilde{A}(\alpha\omega)) &= \frac{1}{\alpha}A(\frac{t}{\alpha}) && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

2) Pochodna

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(A'(t)) &= \frac{1}{2\pi}\left[A(t) \cdot e^{-i\omega t}\right]_a^b + i\omega \cdot \mathcal{F}(A(t)) && (8)\\
\mathcal{F}^{-1}(\tilde{A}'(\omega)) &= \frac{1}{2\pi}\left[\tilde{A}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\right]_a^b - it \cdot \mathcal{F}^{-1}(\tilde{A}(\omega)) && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}$$

3) Sploty i podobne

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot f(\tau) \cdot g(t-\tau)) &= \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) && (11)\\
\mathcal{F}(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot f(\tau) \cdot f(t+\tau)) &= \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{f}(-\omega) && (12)
\end{aligned}$$