XXII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Lusterka

(wersja 1.0)

Piotr Migdał

V LO w Bielsku-Białej
ul. Słowackiego 45
tel/fax (033) 822 18 09

opiekun:
mgr Tomasz Szymczyk

Spis treści

Streszczenie

Praca *„Lusterka”* zawiera wprowadzenie i analizę układów zawierających tzw. lusterka.

Lusterka są to obiekty odbijające lub przepuszczające wiązki (np. świetlne). Można je dodawać, pytając się później o ich wypadkowe właściwości albo sprawdzając natężenie przechodzące przez ich wnętrze. Co jest istotne, suma dwóch bądź więcej lusterek, oprócz wyszczególnionych przypadków gdy światło się gdzieś w środku „zapętla”, jest też lusterkiem. Zwykle nie ma przeszkód by stworzyć nieskończony układ lusterek. Co więcej - czasem okazuje się to owocne (np. % odbicia światła od nieskończonego szeregu tzw. rozpraszaczy można wyliczyć z pewnej granicy).

Da się także stworzyć ciągłe układy lusterek - każde nieskończenie mało zmienia wiązkę, ale jest ich nieskończenie wiele. Okazuje się, że taki układ nie dość, że ma sens, to jeszcze wykazuje pewne ciekawe własności.

Przyjęte pojęcia oraz wykonane obliczenia mogą być użyteczne w analizie układów optycznych, kwantowym opisie pola elektrycznego w dielektryku a także modelowaniu niektórych zjawisk losowych.

1 Podstawy i definicje

1.1 Stosowane oznaczenia

Dla zachowania przejrzystości i jednoznaczności pracy, konsekwentnie będą stosowane następujące oznaczenia:

- $[\ldots]$
  oznacza nawias funkcyjny i operatorowy. Zapis $f[x]$ oznacza, że x jest argumentem funkcji/operatora f.
- $\mathbb{i}$
  oznacza jednostkę urojoną, czyli $\mathbb{i}^2 = -1$
- $\mathbb{e}$
  oznacza podstawę logarytmu naturalnego, $\mathbb{e} = 2.71828\ldots$

1.2 Pojęcie lusterek

1.2.1 Definicja wiązki

Wiązka jest to obiekt zawierający 3 liczby - rodzaj $c \in -1, +1$, położenie n i natężenie a. Wiązke oznaczamy jako $W_c[n, a]$. Natężenie wiązek tego samego rodzaju i majacych to samo położenie jest addytywne.

$$W_c[n, a+b] \iff W_c[n, a] + W_c[n, b] \tag{1}$$

Stosujemy także następujący zapis.

$$W_c[n, a] \quad = \quad aW_c[n, 1] \tag{2}$$

Natężenie wiązki oznaczamy jako $I_c[n, t]$, gdzie j pozostaje rodzajem, n położeniem, a t jest unikatowym indeksem przy danych c i n. Całkowite natężenie oznaczamy jako $I_c[n]$ i jest równe

$$I_c[n] := \sum_{\text{wszystkie t}} I_c[n, t] \tag{3}$$

Przykład 1 *Liczba neutronów przechodzących w jednostce czasu przez konkretną wysokość pionowej szczczeliny jest wiązką. Rodzajem może być spin - góra lub dół.*

1.2.2 Definicja lusterka

Lusterko $\mathcal{A}$ jest to obiekt działający na wiązkę, zawierający cztery liczby: r_1, r_2, $p_1 \neq 0$ i $p_2 \neq 0$. Jeśli 0 i 1 będą odpowiednio położeniami wiązki tuż przed i tuż po lustrze oraz -1 i $+1$ będą oznaczały odpowiednio wiązkę biegnącą w lewo i w prawo, to

$$\mathcal{A}[W_+[0, 1]] \quad = \quad W_-[0, r_1] + W_+[1, p_1] \tag{4}$$
$$\mathcal{A}[W_-[1, 1]] \quad = \quad W_-[0, p_2] + W_+[1, r_2] \tag{5}$$

Lusterko $\mathcal{A}$ w działaniu na każdą inną wiązkę daje identyczność. W ogólności - każde lusterko działa tylko na wiązke tuż przed lusterkiem skierowaną w prawo oraz tuż za - w lewo.

Lusterko $\mathcal{A}$ jest operatorem liniowym, czyli zawsze zachodzi

$$\mathcal{A}[W_c[n, a]] \quad = \quad a\mathcal{A}[W_c[n, 1]] \tag{6}$$

Warto zauważyć, że gdy podziałamy $\mathcal{A}$ więcej razy na układ tylko z tym jedym lusterkiem, osiągniemy efekt jaky by uzyskaliśmy działając tylko raz.

Wiązkę, która powstała z innej wiązki o przeciwnym kierunku lecz tym samym położeniu, nazywamy wiązką odbitą od $\mathcal{A}$. r_1 i r_2 nazywamy odbijalnością odpowiednio prawo- i lewostronną. Wiązkę, która powstała z innej wiązki o tym samym kierunku lecz tym innym położeniu, nazywamy wiązką przechodzącą przez $\mathcal{A}$. r_1 i r_2 nazywamy przepuszczalnością odpowiednio prawo- i lewostronną.

Po zastosowaniu lusterka wiązki $W_+[0,1]$ (wejście z lewej) i $W_-[1,1]$ (wejście z prawej) zawsze będą znikały, tworząc $W_-[0,x]$ (wyjście z lewej) i $W_+[1,y]$ (wyjście z prawej). Możemy spisać zależność wyjścia od wejścia, korzystając z natężeń.

$$I_+[1] = I_+[0]\,p_1 + I_-[1]\,r_1 \tag{7}$$
$$I_-[0] = I_+[0]\,r_2 + I_-[1]\,p_2 \tag{8}$$

Warto zapisać powyższy związek w postaci iloczynu wektora i macierzy.

$$(I_+[1], I_-[0]) = (I_+[0], I_-[1])\begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ r_2 & p_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Macierz z równania (7) nazywamy macierzą lusterka $\mathcal{A}$, co zapisujemy jako

$$M[\mathcal{A}] := \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ r_2 & p_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Do całkowitego opisu lusterka w układzie wystarczy podanie jego macierzy oraz położenia.

Przykład 2 *Jeśli wiązką jest strumień światła (padający z lewej albo prawej strony), lusterkiem może być płytka z kolorowego szkła. Część światła jest odbita, część przez nią przechodzi a reszta ulega pochłonięciu.*

1.3 Dodawanie

1.3.1 Definicja dodawania 2 lusterek

Przez dodawanie dwóch lusterek $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ rozumiemy stworzenie takiego lusterka $\mathcal{C}$, że dla położeń 0 (przed lusterkami), 1 (między lusterkami) i 2 (za lusterkami) zachodzi

$$\overbrace{\mathcal{A}[\mathcal{B}[\mathcal{A}[\ldots[W_+[0,a]]]]]}^{\text{nieskończona iteracja}} \iff \mathcal{C}[W_+[0,a]] \quad \text{oraz} \tag{11}$$
$$\underbrace{\mathcal{A}[\mathcal{B}[\mathcal{A}[\ldots[W_+[2,b]]]]]}_{\text{nieskończona iteracja}} \iff \mathcal{C}[W_+[2,b]] \tag{12}$$

By mogliśmy sumować lusterka $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ powyższa iteracja musi być zbieżna. Nic nie wskazuje na to, że tak być musi i, jak się okazuje, nie każde 2 lusterka możemy zsumować.

1.3.2 Kolejność w sumowaniu

O ile kolejność występowania $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ w iteracji nie ma znaczenia, to w działanie na wiązki - ma (np. tylko pierwsze lusterko działa na $W_+[0,1]$). Wynika z tego, że w dodawaniu lusterek kolejność ma znaczenie.

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{13}$$
$$\mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{A} \tag{14}$$

Tutaj $\mathcal{C}$ na ogól nie będzie równe $\mathcal{D}$.

Kolejność wykonywania działań nie ma tu znaczenia. Zachodzi w istocie

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \tag{15}$$

1.3.3 Sumowanie n lusterek

W ogólnym przypadku, gdy chcemy dodać n lusterek, sumą jest

$$\mathcal{C} = \overbrace{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \ldots + \mathcal{A}_n}^{\text{n elementów}} \tag{16}$$

Taką sumę możemy policzyć z tożsamości (gdzie $A[x] = \mathcal{A}_1\left[\mathcal{A}_2\left[\mathcal{A}_3\left[\ldots\mathcal{A}_n\left[x\right]\right]\right]\right]$)

$$\overbrace{A\left[A\left[A\left[\ldots\left[W_+\left[0,a\right]\right]\right]\right]\right]}^{\text{nieskończona iteracja}} \iff \mathcal{C}\left[W_+\left[0,a\right]\right] \quad \text{oraz} \tag{17}$$

$$\underbrace{A\left[A\left[A\left[\ldots\left[W_+\left[n,b\right]\right]\right]\right]\right]}_{\text{nieskończona iteracja}} \iff \mathcal{C}\left[W_+\left[n,b\right]\right] \tag{18}$$

Wynik dostaniemy taki sam jak dla rekurencyjnego dadawania lusterek. Poprawność powyższego wzoru wynika z braku zależności, od numeru wykonywanego kroku w iteracji, macierzy lusterek jak i jego położenia. Nie ważne czy wiązka padnie na dane lusterko w jakimś kroku jako cała, czy w dwóch różnych o rozdzielonych natężeniach.

1.4 Odejmowanie

Prawostronne odjęcie lusterka $\mathcal{B}$ od $\mathcal{C}$ daje $\mathcal{A}$ wtedy, gdy sumą $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jest $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \iff \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{19}$$

Analogicznie definiujemy odejmowanie lewostronne

$$-\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} \iff \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{20}$$

1.5 Operator zamiany stron

Operację zamiany stron $S[\mathcal{A}]$ definiujemy jako

$$M[S[\mathcal{A}]] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M[\mathcal{A}] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Taki zapis mówi tyle, że zmieniamy miejscami i kierunkami wiązkę w prawo i w lewo, zarówno na wejściu jak i wyjściu.

Możemy zapisać także, jako proste wnioski definicji

$$S[\mathcal{A} + \mathcal{B}] = S[\mathcal{B}] + S[\mathcal{A}] \tag{22}$$

$$M[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ r_2 & p_2 \end{pmatrix} \qquad M[S[\mathcal{A}]] = \begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ r_1 & p_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Automatycznie z tego wynika, że dla dowolnej liczby sumowanych lusterek zachodzi

$$S[\overbrace{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \ldots + \mathcal{A}_n}^{\text{n elementów}}] = \overbrace{S[\mathcal{A}_n] + S[\mathcal{A}_{n-1}] + S[\mathcal{A}_{n-2}] + \ldots + S[\mathcal{A}_1]}^{\text{n elementów}} \tag{24}$$

Lusterko $\mathcal{A}$ nazywamy symetrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $M[\mathcal{A}] = M[S[\mathcal{A}]]$, czyli gdy $r_1 = r_2$ i $p_1 = p_2$. Suma dowolnej n takich samych, symetrycznych lusterek $\mathcal{A}$ jest lusterkiem symetrycznym (dość oczywiste).

2 Układy 2 lusterek

Zaopatrzenie w podstawowy zestaw pojęć możemy przystąpić do wykonywania prostych działań na układach lusterek.

2.1 Wzory na dodawanie 2 lusterek

Wykonujemy sumę

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{25}$$

przy czym znamy macierze $M[\mathcal{A}]$ oraz $M[\mathcal{B}]$ a chcemy wyznaczyć $M[\mathcal{C}]$.

$$M[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ r_2 & p_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$
$$M[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} P_1 & R_1 \\ R_2 & P_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$
$$M[\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} \psi_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Położenia oznaczmy jako 0 (przed lusterkami), 1 (między lusterkami) i 2 (za lusterkami). Rozważmy co dzieje się z wiązką $W_+[0,1]$. Działa na nią $\mathcal{A}$ (krok 1), więc jest rozbijana na $W_-[0,r_1]$ i $W_+[1,p_1]$. Teraz działa $\mathcal{B}$ (krok 2), które nie zmienia $W_-[0,r_1]$, podczas gdy $W_+[1,p_1]$ przechodzi na $W_+[2,p_1P_1]$ i $W_-[1,p_1R_1]$. Następnie działa ponownie $\mathcal{A}$ (krok 3), które to zmienia $W_-[1,p_1R_1]$ na $W_-[0,p_1R_1p_2]$ i $W_+[1,p_1R_1r_2]$. Sytuacja wydaje się być beznadziejna, jednak tak nie jest - w istocie doszliśmy z powrotem do kroku 2, z tym że natężenie wiązki odbitej zostało przemnożone przez czynnik R_1r_2. Zapiszmy nasze postępowanie w formie równań.

$$\text{(krok 1)} \quad \mathcal{A}\left[W_+[0,1]\right] = \overbrace{W_-[0,r_1]}^{\text{odbita}} + \overbrace{W_+[1,p_1]}^{\text{przechodząca}} \tag{29}$$
$$\text{(krok 2)} \quad \mathcal{B}\left[W_+[1,p_1]\right] = W_-[1,p_1R_1] + W_+[2,p_1P_1] \tag{30}$$
$$\text{(krok 3)} \quad \mathcal{A}\left[W_-[1,p_1R_1]\right] = W_+[1,p_1R_1r_2] + W_-[0,p_1R_1p_2] \tag{31}$$
$$\text{(krok 4)} \quad \mathcal{B}\left[W_+[1,p_1R_1r_2]\right] = R_1r_2\left(W_-[1,p_1R_1] + W_+[2,p_1P_1]\right) \tag{32}$$

Krok 4 jest równoważny krokowi 2 pomnożonemu przez R_1r_2. Wynika z tego, że każdego $(t+2)$ kroku (przy czym $t \geqslant 2$, numeracja przed wykonaniem operacji) mamy natężenia jak w kroku t, pomnożone przez odpowiedni czynnik. Od razu wychodzi że

$$I_+[1,t+2] = R_1r_2I_+[1,t] \tag{33}$$
$$I_-[1,t+3] = R_1r_2I_-[1,t+1] \tag{34}$$

Bezpośrednio znajdujemy z równań (29) i (30) $I_+[1,2]$ i $I_-[1,3]$

$$I_+[1,2] = p_1 \tag{35}$$
$$I_-[1,3] = p_1R_1 \tag{36}$$

Teraz możemy zapisać $(k \geqslant 1)$

$$I_+[1,2k] = p_1(R_1r_2)^{k-1} \tag{37}$$
$$I_-[1,2k+1] = p_1R_1(R_1r_2)^{k-1} \tag{38}$$

Musimy zobaczyć na co przechodzi natężenie w środku (37) i (38), przy uwzględnieniu tylko miejsc 0 i 2.

$$I_+[2,2k+1] = P_1I_+[1,2k] = p_1P_1(R_1r_2)^{k-1} \tag{39}$$
$$I_-[0,2k+2] = p_2I_-[1,2k+1] = p_1p_2R_1(R_1r_2)^{k-1} \tag{40}$$

Nic nie stoi na przeszkodzie, by zsumować otrzymane natężenia. Musimy jednak pamiętać o pierwszym odbiciu (nie objęty powyższym wzorem) oraz o indeksach jakie możemy stosować (nietrudno sprawdzić, że $k \geqslant 1$). Dostajemy w efekcie sumy

$$I_+[2] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_1P_1(R_1r_2)^{k-1}\right) = \tag{41}$$
$$= p_1P_1\sum_{k=0}^{\infty}(R_1r_2)^k = \tag{42}$$
$$= p_1P_1\frac{1-\lim_{k\to\infty}(R_1r_2)^k}{1-R_1r_2} = \tag{43}$$
$$= \frac{p_1P_1}{1-R_1r_2} \tag{44}$$

Skorzystaliśmy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego. Granica $\lim_{k\to\infty}(R_1r_2)^k$ jest tylko wtedy właściwa (i równa zeru) gdy $|R_1r_2| < 1$. Okaże się to jedynym warunkiem sumowalności lusterek.

Przypominając, że odbicie z pierwszego kroku jest równe

$$I_-[0,2] \quad = \quad r_1 \tag{45}$$

możemy analogicznie postępując obliczyć natężenie $I_-[0]$

$$\begin{aligned}
I_-[0] \quad &= \quad r_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_1p_2R_1(R_1r_2)^{k-1}\right) = &(46)\\
&= \quad r_1 + p_1p_2R_1\sum_{k=0}^{\infty}(R_1r_2)^k = &(47)\\
&= \quad r_1 + p_1p_2R_1\frac{1-\lim_{k\to\infty}(R_1r_2)^k}{1-R_1r_2} = &(48)\\
&= \quad r_1 + \frac{p_1p_2R_1}{1-R_1r_2} = &(49)\\
&= \quad \frac{r_1 - R_1r1r_2 + p_1p_2R_1}{1-R_1r_2} &(50)
\end{aligned}$$

Wiązką na wejściu było $W_+[0,1]$, a z zatem możemy zapisać

$$\begin{aligned}
I_+[2] \quad &= \quad \frac{p_1P_1}{1-R_1r_2}I_+[0] &(51)\\
I_-[0] \quad &= \quad r_1 + \frac{p_1p_2R_1}{1-R_1r_2}I_+[0] &(52)
\end{aligned}$$

Tym samym otrzymujemy wzory na ψ_1 oraz ρ_1

$$\begin{aligned}
\psi_1 \quad &= \quad \frac{p_1P_1}{1-R_1r_2} &(53)\\
\rho_1 \quad &= \quad r_1 + \frac{p_1p_2R_1}{1-R_1r_2} &(54)
\end{aligned}$$

Teraz kolej na obliczenie ψ_2 oraz ρ_2. Możemy powtórzyć całe poprzednie rozumowanie, jednak istnieje prostszy sposób. Sytuacja, jaką chcemy zbadać jest symetryczna do już wyliczonej. Wiązka pada z prawej strony, na przed sobą prawą ścianę $\mathcal{B}$, po czym - $\mathcal{B}$. W takim razie zastosujmy do sumy operator zamiany stron

$$\begin{aligned}
S[\mathcal{C}] \quad &= \quad S[\mathcal{A}+\mathcal{B}] &(55)\\
S[\mathcal{C}] \quad &= \quad S[\mathcal{B}]+S[\mathcal{A}] &(56)
\end{aligned}$$

Czyli dostajemy sumę lusterek $S[\mathcal{B}]$ i $S[\mathcal{A}]$, przy czym ich macierze to

$$\begin{aligned}
S[M[\mathcal{B}]] \quad &= \quad \begin{pmatrix} P_2 & R_2 \\ R_1 & P_1 \end{pmatrix} &(57)\\
S[M[\mathcal{A}]] \quad &= \quad \begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ r_1 & p_1 \end{pmatrix} &(58)\\
S[M[\mathcal{C}]] \quad &= \quad \begin{pmatrix} \psi_2 & \rho_2 \\ \rho_1 & \psi_1 \end{pmatrix} &(59)
\end{aligned}$$

Wartości elementów ψ_2 i ρ_2 już znaleźliśmy w (53) i (54), przy czym stosowaliśmy inne oznaczenia. Jako, że nie ważne jak nazwiemy zmienne, wynik nie może się zmienić, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\psi_2 \quad &= \quad \frac{p_2P_2}{1-R_1r_2} &(60)\\
\rho_2 \quad &= \quad R_2 + \frac{P_1P_2r_2}{1-R_1r_2} &(61)
\end{aligned}$$

Tym samym w pełni obliczyliśmy macierz sumy lusterek oraz znaleźliśmy warunek, dla którego iteracje (11) i (12) są zbieżne. Zapiszmy to w pełnej formie, gdyż nie raz będziemy z tego korzystać. Zacznijmy od 3 warunków koniecznych do spełnienia.

$$
\begin{aligned}
M[\mathcal{A}] &= \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ r_2 & p_2 \end{pmatrix} && (62) \\
M[\mathcal{B}] &= \begin{pmatrix} P_1 & R_1 \\ R_2 & P_2 \end{pmatrix} && (63) \\
|R_1 r_2| &< 1 && (64) \\
M[\mathcal{A}+\mathcal{B}] &= \begin{pmatrix} \frac{p_1 P_1}{1-R_1 r_2} & r_1 + \frac{p_1 p_2 R_1}{1-R_1 r_2} \\ R_2 + \frac{P_1 P_2 r_2}{1-R_1 r_2} & \frac{p_2 P_2}{1-R_1 r_2} \end{pmatrix} && (65)
\end{aligned}
$$

Dla przejrzystości, czasem warto używać zapisu

$$
\begin{pmatrix} \frac{p_1 P_1}{1-R_1 r_2} & r_1 + \frac{p_1 p_2 R_1}{1-R_1 r_2} \\ R_2 + \frac{P_1 P_2 r_2}{1-R_1 r_2} & \frac{p_2 P_2}{1-R_1 r_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-R_1 r_2} \begin{pmatrix} p_1 P_1 & p_1 p_2 R_1 \\ P_1 P_2 r_2 & p_2 P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ R_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (66)
$$

2.2 Wzory na odejmowanie 2 lusterek

2.2.1 Odejmowanie prawostronne

Mając już wyznaczone wzory na dodawanie, można pokusić się o wyznaczenie wzorów na odejmowaniu 2 lusterek. Nie jest to rzeczą trudną, gdyż tym razem nie musimy zagłębiać się w żadne iteracje. Co więcej - nie musimy nawet wiedzieć co to lusterko czy wiązka. Wystarczy rozwiązać układ równań z danymi $\mathcal{C}$ i $\mathcal{B}$ oraz szukanym $\mathcal{A}$. Oznaczenia stosujemy jak poprzednio. Najwydogniej będzie nam rozpisać macierz $M[\mathcal{C}]$ na elementy.

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{p_1 P_1}{1-R_1 r_2} && (67) \\
\rho_1 &= r_1 + \frac{p_1 p_2 R_1}{1-R_1 r_2} && (68) \\
\psi_2 &= \frac{p_2 P_2}{1-R_1 r_2} && (69) \\
\rho_2 &= R_2 + \frac{P_1 P_2 r_2}{1-R_1 r_2} && (70)
\end{aligned}
$$

W rozwiązaniach będziemy zakładać, że mianowniki są niezerowe. Przekształcamy równanie (70) by ostrzymać r_2.

$$
\begin{aligned}
\rho_2 - R_2 &= \frac{P_1 P_2 r_2}{1-R_1 r_2} && (71) \\
\rho_2 - R_2 &= \frac{P_1 P_2}{r_2^{-1} - R_1} && (72) \\
r_2^{-1} - R_1 &= \frac{P_1 P_2}{\rho_2 - R_2} && (73) \\
r_2^{-1} &= \frac{P_1 P_2}{\rho_2 - R_2} + R_1 && (74) \\
r_2 &= \frac{\rho_2 - R_2}{P_1 P_2 + R_1 \rho_2 - R_1 R_2} && (75)
\end{aligned}
$$

Znając r_2 można wyznaczyć p_1 z równania (67).

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\psi_1}{P_1}(1 - R_1 r_2) && (76) \\
p_1 &= \frac{\psi_1}{P_1}\left(1 - R_1 \frac{\rho_2 - R_2}{P_1 P_2 + R_1 \rho_2 - R_1 R_2}\right) && (77) \\
p_1 &= \frac{\psi_1}{P_1}\left(1 - 1 + \frac{P_1 P_2}{P_1 P_2 + R_1 \rho_2 - R_1 R_2}\right) && (78) \\
p_1 &= \frac{\psi_1 P_2}{P_1 P_2 + R_1 \rho_2 - R_1 R_2} && (79)
\end{aligned}
$$

W bardzo podobny sposób obliczamy p_2 z (69).

$$p_2 = \frac{\psi_2}{P_2}\left(1 - R_1 r_2\right) \tag{80}$$

$$p_2 = \frac{\psi_2}{P_2}\left(1 - R_1 \frac{\rho_2 - R_2}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2}\right) \tag{81}$$

$$p_2 = \frac{\psi_2}{P_2}\left(1 - 1 + \frac{P_1 P_2}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2}\right) \tag{82}$$

$$p_2 = \frac{\psi_2 P_1}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{83}$$

W końcu przystępujemy do szukania r_1. Korzystamy z równania (68).

$$r_1 = \rho_1 - \frac{p_1 p_2 R_1}{1 - R_1 r_2} \tag{84}$$

By nie męczyć się niepotrzebnie skorzystamy z podstawienia równania (69).

$$r_1 = \rho_1 - \frac{\psi_2 R_1}{P_2} p_1 \tag{85}$$

$$r_1 = \rho_1 - \frac{\psi_2 R_1}{P_2}\frac{\psi_1 P_2}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{86}$$

$$r_1 = \rho_1 - \frac{\psi_1\psi_2 R_1}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{87}$$

Teraz możemy zebrać wyniki w postaci równań na p_1, r_1, p_2 i r_2, po prostu przepisując (75), (79), (83) i (87)

$$p_1 = \frac{\psi_1 P_2}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{88}$$

$$r_1 = \rho_1 - \frac{\psi_1\psi_2 R_1}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{89}$$

$$p_2 = \frac{\psi_2 P_1}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{90}$$

$$r_2 = \frac{\rho_2 - R_2}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2} \tag{91}$$

Możemy znowu (jak w przypadku dodawania) zastosować zapis macierzowy.

$$M[\mathcal{C} - \mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1 P_2}{P_1P_2+R_1\rho_2-R_1R_2} & \frac{\rho_1 P_1 P_2 + R_1(\rho_1\rho_2 - \rho_1 R_2 - \psi_1\psi_2)}{P_1P_2+R_1\rho_2-R_1R_2} \\ \frac{\rho_2-R_2}{P_1P_2+R_1\rho_2-R_1R_2} & \frac{\psi_2 P_1}{P_1P_2+R_1\rho_2-R_1R_2} \end{pmatrix} = \tag{92}$$

$$= \frac{1}{P_1 P_2 + R_1\rho_2 - R_1 R_2}\begin{pmatrix} \psi_1 P_2 & -\psi_1\psi_2 R_1 \\ \rho_2 - R_2 & \psi_2 P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{93}$$

2.2.2 Odejmowanie lewostronne

Teraz kolej na znalezienie wzorów na odejmowanie lewostronne. Nie jest to rzecz trudna, jeśli już potrafimy odejmować prawostronnie i zamieniać stronami. Spójrzmy, przy oznaczeniach jak poprzednio, na działanie

$$-\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} \tag{94}$$

Dużo uprości nam życie zastosowanie operacji zamiany stron - w efekcie otrzymamy działanie, które już rozwiązaliśmy.

$$S[-\mathcal{A} + \mathcal{C}] = S[\mathcal{B}] \tag{95}$$

$$S[\mathcal{C}] - S[\mathcal{A}] = S[\mathcal{B}] \tag{96}$$

Oznaczenia są teraz zmienione, ale skoro *„takie same równania mają takie same rozwiązania”* (jak mawiał R. Feynman) matematyczna istota problemu pozostaje niezminiona. Wystarczy w równaniach (88)-(91) dokonać następoującego „przenazywania”:

$$\mathcal{C} \to S[\mathcal{C}] \tag{97}$$

$$\mathcal{B} \to S[\mathcal{A}] \tag{98}$$

$$\mathcal{A} \to S[\mathcal{B}] \tag{99}$$

Tym sposobem otrzymujemy łatwo, szybko i przyjemnie rozwiązania

$$P_1 = \frac{\psi_1 p_2}{p_1 p_2 + r_2\rho_1 - r_1 r_2} \tag{100}$$

$$R_1 = \frac{\rho_1 - r_1}{p_1 p_2 + r_2\rho_1 - r_1 r_2} \tag{101}$$

$$P_2 = \frac{\psi_2 p_1}{p_1 p_2 + r_2\rho_1 - r_1 r_2} \tag{102}$$

$$R_2 = \rho_1 - \frac{\psi_1\psi_2 r_2}{p_1 p_2 + r_2\rho_1 - r_1 r_2} \tag{103}$$

I znowu w postaci macierzowej

$$M[-\mathcal{A}-\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1 p_2}{p_1 p_2+r_2\rho_1-r_1 r_2} & \frac{\rho_1-r_1}{p_1 p_2+r_2\rho_1-r_1 r_2} \\ \rho_1 - \frac{\psi_2\psi_2 r_2}{p_1 p_2+r_2\rho_1-r_1 r_2} & \frac{\psi_2 p_1}{p_1 p_2+r_2\rho_1-r_1 r_2} \end{pmatrix} = \tag{104}$$

$$= \frac{1}{p_1 p_2 + r_2\rho_1 - r_1 r_2}\begin{pmatrix} \psi_1 p_2 & \rho_1 - r_1 \\ -\psi_1\psi_2 r_2 & \psi_2 p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{105}$$

2.3 Natężenie pomiędzy lusterkami

2.3.1 Wyprowadzenie

W sumowaniu $\mathcal{A}$ z $\mathcal{B}$ obliczyliśmy całkowite natężenie wiązek wychodzących. Możemy też zsumować natężenia między lusterkami. Nic trudnego - mamy już wzory (37) i (38) na $I_+[1,2k]$ i $I_-[1,2k+1]$. Ciekawszym rozwiązaniem będzie jenak znalezienie innego sposobu na obliczenie $I_+[1]$ i $I_-[1]$.

Zwróćmy uwagę na jeden fakt. Jeśli świecimy z lewej stony, czyli wiązką $I_+[0]W_+[0,1]$, natężenie całkowite na wyjściu z prawej $I_+[2]$ będzie równe natężeniu $I_+[1]$ razy czynnik P_1.

$$I_+[2,t+1] = P_1 I_+[1,t] \tag{106}$$

$$\sum_t I_+[2,t+1] = \sum_t (P_1 I_+[1,t]) \tag{107}$$

$$I_+[2] = P_1 I_+[1] \tag{108}$$

Czy w tym przypadku $I_-[0]$ będzie równe $I_-[1]$ razy p_2? Zwykle nie. Nie możemy zapomnieć, że $W_-[0,a]$ są tworzone nie tylko przez przejścia przez $\mathcal{A}$, ale i początkowe odbicie. Wobec tego

$$I_-[0] - r_1 I_+[0] = p_2 I_-[1] \tag{109}$$

Daje to zależności, przy $I_-[2] = 0$

$$I_+[1] = \frac{I_+[2]}{P_1} \tag{110}$$

$$I_-[1] = \frac{I_-[0] - r_1 I_+[0]}{p_2} \tag{111}$$

Dobrze, ale wypadałoby jeszcze zapisać natężenie na wyjściu $I_-[0]$ jako iloczyn $I_-[2] = 0$ i stałej. Z definicji mamy $I_-[0] = \rho_1 I_+[0]$ oraz $I_+[2] = \psi_1 I_+[0]$, więc

$$I_+[1] = \frac{\psi_1 I_+[0]}{P_1} \tag{112}$$

$$I_-[1] = \frac{(\rho_1 - r_1)\, I_+[0]}{p_2} \tag{113}$$

Kolej na obliczenie analogicznych zależności dla padającej wiązki $I_-[2]W_-[2,1]$. Do tego skorzystamy z operacji zamiany stron. Błyskawicznie otrzymujemy związki

$$I_-[0] = p_2 I_-[1] \tag{114}$$

$$I_+[2] - R_2 I_-[2] = P_1 I_+[1] \tag{115}$$

Daje to zależności, przy $I_+[0] = 0$ oraz podstawieniu $I_+[2] = \rho_2 I_-[2]$ i $I_-[0] = \psi_2 I_-[2]$

$$I_-[1] = \frac{\psi_2 I_-[2]}{p_2} \tag{116}$$
$$I_+[1] = \frac{(\rho_2 - R_2)\, I_-[2]}{P_1} \tag{117}$$

Skoro $W_-[0,1]$ nie może przejść na $W_+[2,1]$ (ani odwrotnie) oraz badaliśmy wpierw sytuację dla $I_-[2] = 0$ (numerki), a później dla $I_+[0] = 0$, pełny związek będzie scharakteryzowany przez

$$I_+[1] = \frac{\psi_1 I_+[0]}{P_1} + \frac{(\rho_2 - R_2)\, I_-[2]}{P_1} \tag{118}$$
$$I_-[1] = \frac{\psi_2 I_-[2]}{p_2} + \frac{(\rho_1 - r_1)\, I_+[0]}{p_2} \tag{119}$$
$$I_+[1] = \frac{\psi_1}{P_1} I_+[0] + \frac{\rho_2 - R_2}{P_1} I_-[2] \tag{120}$$
$$I_-[1] = \frac{\rho_1 - r_1}{p_2} I_+[0] + \frac{\psi_2}{p_2} I_-[2] \tag{121}$$

Jeśli przez M[$\mathcal{M}$] (należy pamiętać, że $\mathcal{M}$ nie jest lusterkiem!) oznaczymy macierz zależności natężeń w środku od natężeń wejściowych, czyli

$$(I_+[1], I_-[1]) = (I_+[0], I_-[2])\, M[\mathcal{M}] \tag{122}$$

to będzie prawdziwy związek

$$M[\mathcal{M}] = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1}{P_1} & \frac{\rho_1 - r_1}{p_2} \\ \frac{\rho_2 - R_2}{P_1} & \frac{\psi_2}{p_2} \end{pmatrix} = \tag{123}$$
$$= \begin{pmatrix} \psi_1 & \rho_1 - r_1 \\ \rho_2 - R_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} = \tag{124}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} \psi_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \psi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ R_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} = \tag{125}$$
$$= \left(\frac{1}{1 - R_1 r_2} \begin{pmatrix} p_1 P_1 & p_1 p_2 R_1 \\ P_1 P_2 r_2 & p_2 P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ R_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ R_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} = \tag{126}$$
$$= \frac{1}{1 - R_1 r_2} \begin{pmatrix} p_1 P_1 & p_1 p_2 R_1 \\ P_1 P_2 r_2 & p_2 P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} = \tag{127}$$
$$= \frac{1}{1 - R_1 r_2} \begin{pmatrix} p_1 & p_1 R_1 \\ P_2 r_2 & P_2 \end{pmatrix} \tag{128}$$

Przykład 3 *Natężenie w środku może nas interesować, gdy między lusterkami jest bardzo rzadki dym - praktycznie nie zmienia on natężenia w układzie, ale świeci wprost proporcjonalnie do sumy natężeń w lewo i w prawo.*

2.3.2 Równanie różnicowe

Przepiszmy równania (109) i (115), wyprowadzone przy okazji liczenia natężeń między lustarkami.

$$I_-[0] - r_1 I_+[0] = p_2 I_-[1] \tag{129}$$
$$I_+[2] - R_2 I_-[2] = P_1 I_+[1] \tag{130}$$

Zwróćmy uwagę, że położenia mogą być ustalane względnie, liczy się tylko ich kolejność (pod warunkiem, że wszytskie lusterka w ukłądzie śa takie same). Co więcej, równania (129) i (130) były wyprowadzane niezależnie, czyli możemy przesunać położenie o inną stałą w pierwszym z nich niż w drugim.

$$I_-[n] - r_1 I_+[n] = p_2 I_-[n+1] \tag{131}$$
$$I_+[n+1] - R_2 I_-[n+1] = P_1 I_+[n] \tag{132}$$

Dostajemy w efekcie układ równań różnicowych, którym można opisać dowolną sumę jednakowych lusterer. Nie będziemy jednak go rozwiązywać (co nie jest trudne, ale czasochłonne), gdyż istnieją jeszcze ogólniejsze rozwiązania, które zostaną poruszone przy ciągłych układach lusterek.

3 Dyskretne układy lusterek

3.1 Układ pochłaniaczy

Zdefiniujmy pochłaniacza jako lusterko z zerową odbijalnością. Tzn lusterko $\mathcal{A}$ jest pochłaniaczem wtedy i tylko wtedy gdy $r_1 = r_2 = 0$.

$$\mathcal{A} \text{ jest pochłaniaczem} \iff M[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \tag{133}$$

Chcemy dodać do siebie n pochłaniaczy $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n$. Najprościej możemy to zrobić rekurencyjnie dodawanie dwóch lusterek - wcześniej złożonego $\mathcal{A}[k]$ i $\mathcal{A}_{k+1}$.

$$\psi_1[1] = p_{1,1} \tag{134}$$
$$\rho_1[1] = r_{1,1} = 0 \tag{135}$$
$$\psi_2[1] = p_{2,1} \tag{136}$$
$$\rho_2[1] = r_{2,1} = 0 \tag{137}$$
$$\psi_1[k+1] = \frac{p_1[k]P_{1,k}}{1 - R_{1,k}r_2[k]} \tag{138}$$
$$\rho_1[k+1] = r_1[n] + \frac{p_1[k]p_2[k]R_{1,k}}{1 - R_{1,k}r_2[k]} \tag{139}$$
$$\psi_2[k+1] = \frac{p_2[k]P_{2,k}}{1 - R_{1,k}r_2[k]} \tag{140}$$
$$\rho_2[k+1] = R_2 + \frac{P_{1,k}P_{2,k}r_2[k]}{1 - R_{1,k}r_2[k]} \tag{141}$$

Prędko zauważamy, że skoro wszystkie odbijalności lusterek składowych $r_{1,k}$ i $r_{2,k}$ są zerowe, odbijalności sumy lusterek też będą zerowe.

$$\rho_1[k] = 0 \tag{142}$$
$$\rho_2[k] = 0 \tag{143}$$

Zapisujemy w takim razie układ rekurencyjnych w czytelniejszej formie.

$$\psi_1[1] = p_{1,1} \tag{144}$$
$$\psi_2[1] = p_{2,1} \tag{145}$$
$$\psi_1[k+1] = p_1[k]P_{1,k} \tag{146}$$
$$\psi_2[k+1] = p_2[k]P_{2,k} \tag{147}$$

Błyskawicznie otrzymujemy rozwiązanie.

$$\psi_1[n] = \prod_{k=1}^{n} p_{1,k} \tag{148}$$
$$\psi_2[n] = \prod_{k=1}^{n} p_{2,k} \tag{149}$$

W tym przypadku otrzymanie rozwiązania z definicji dodawania nie jest trudne - po skończenie wielu krokach (dokładniej: n do n^2) nic już nie będzie działo się z wiązkami (przejdą one przez układ). Skoro nie występują żadne odbicia natężenie między pochłaniaczami o indeksach k i $k+1$ będzie takie samo jak dla sumy k pierwszych lusterek (w przypadku wiązek w prawo) oraz jak dla sumy $n-k$ ostatnich lusterek.

$$I_+[k] = I_+[0]\prod_{i=1}^{k} p_{1,i} \tag{150}$$
$$I_-[k] = I_-[n]\prod_{i=k+1}^{n} p_{1,i} \tag{151}$$

Zajmijmy się bez staty ogólności natężeniem w prawo. Jak była już o tym mowa, natężenie zaraz po k-tym pochłaniaczu nie zależy od tego, czy dalej jest jakiś układ (ani jaki on jest).

Gdy $p_{1,k} = p$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$, natężenie spada wykładniczo wraz z indeksem pochłaniacza za którym jest mierzone

$$I_+[k] = p^k I_+[0] \tag{152}$$

3.2 Układ szkieł

Zdefiniujmy szkło jako lusterko z sumą odbijalności i przepuszczalności równą jedności, dla każdego kierunku. Tzn lusterko $\mathcal{A}$ jest szkłem wtedy i tylko wtedy gdy $p_1 + r_1 = 1$ i $p_2 + r_2 = 1$.

$$\mathcal{A} \text{ jest szkłem} \iff M[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} p_1 & 1 - p_1 \\ 1 - p_2 & p_2 \end{pmatrix} \tag{153}$$

Na razie ograniczmy się do rozważania dodawania n symetrycznych, jednakowych szkieł, czyli spełniających $p_{1,k} = p_{2,k} = p_0$.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że suma swóch szkieł też jest szkłem - w żadnym kroku iteracji suma wszytskich natężeń się nie zmienia.

3.2.1 Dodawanie szkieł

Możemy skorzystać ze wzoru na dodawanie 2 lusterek i iść nim rekurencyjnie, dodając dodatkowe szkła z prawej strony. Wystarczy nam tylko jeden ze wzorów na dodawanie, gdyż mamy tylko jedną niezależną wielkość - $p[1] = p_0$ jako daną, a także jedną jako szukaną $p[n]$ (skoro suma wszystkich natężeń się nie zmienia, $1 - p[n]$ pozostanie odbijalnością). Przepisujemy równanie (67)

$$\psi_1 = \frac{p_1 P_1}{1 - R_1 r_2} \tag{154}$$

$$p[n+1] = \frac{p[n]p_0}{1 - (1 - p_0)(1 - p[n])} \tag{155}$$

$$p[n+1] = \frac{p_0 p[n]}{p_0 + p[n] - p_0 p[n]} \tag{156}$$

$$p[n+1] = \frac{p_0}{\frac{p_0}{p[n]} + 1 - p_0} \tag{157}$$

W tym momencie jednym rozwiązaniem jest wypisanie kilku pierwszych wyrazów, zgadnięcie wzoru i udowodnienie go indukcyjnie. Drugim sposobem, dużo bardziej eleganckim, jest dokonanie następującego podstawienia (bez straty ogólności dziedziny)

$$p[n] = \frac{1}{1 + f[n]} \tag{158}$$

Powróćmy do rozwiązywanego równania (157), dokonując omawianego podstawinia

$$\frac{1}{1 + f[n+1]} = \frac{p_0}{p_0(1 + f[n]) + 1 - p_0} \tag{159}$$

$$\frac{1}{1 + f[n+1]} = \frac{p_0}{1 + p_0 f[n])} \tag{160}$$

$$1 + p_0 f[n] = p_0(1 + f[n+1]) \tag{161}$$

$$f[n+1] - f[n] = \frac{1}{p_0} - 1 \tag{162}$$

Jest to równanie ciągu arytmetycznego.

$$f[n] = f[1] + \left(\frac{1}{p_0} - 1\right)(n - 1) \tag{163}$$

Należy teraz sprawdzić, czemu równa się $f[1]$.

$$\begin{aligned} p[1] &= \frac{1}{1+f[1]} && (164)\\ 1+f[1] &= \frac{1}{p_0} && (165)\\ f[1] &= \frac{1}{p_0}-1 && (166) \end{aligned}$$

Tym samym

$$\begin{aligned} f[n] &= \left(\frac{1}{p_0}-1\right)+\left(\frac{1}{p_0}-1\right)(n-1) && (167)\\ f[n] &= \left(\frac{1}{p_0}-1\right)n && (168) \end{aligned}$$

Pozostaje już tylko znalezienie wzoru na $p[n]$ z $f[n]$, korzystając z (158)

$$\begin{aligned} p[n] &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{p_0}-1\right)n} && (169)\\ p[n] &= \frac{1}{\frac{n}{p_0}-n+1} && (170)\\ p[n] &= \frac{1}{\frac{n-p_0n+p_0}{p_0}} && (171)\\ p[n] &= \frac{p_0}{n-p_0n+p_0} && (172)\\ p[n] &= \frac{p_0}{(n-1)(1-p_0)+1} && (173) \end{aligned}$$

Daje to też, z braku strat całkowitego natężenia, $r[n]$

$$\begin{aligned} r[n] &= 1-p[n] && (174)\\ r[n] &= 1-\frac{p_0}{(n-1)(1-p_0)+1} && (175)\\ r[n] &= 1-\frac{p_0}{(n-1)(1-p_0)+1} && (176)\\ r[n] &= \frac{n(1-p_0)}{(n-1)(1-p_0)+1} && (177) \end{aligned}$$

Zapiszmy $p[n]$ i $r[n]$ przy pomocy r_0. Będzie wyglądało naprawdę ładnie!

$$\begin{aligned} p[n] &= \frac{1-r_0}{(n-1)r_0+1} && (178)\\ r[n] &= \frac{nr_0}{(n-1)r_0+1} && (179) \end{aligned}$$

3.2.2 Natężenie między szkłami

Mamy układ n szkieł o takiej samej przepuszczalności p, chcemy wyznaczyć natężenie między szkłami o indeksach k i $k+1$. Skorzystamy z już wyliczonej macierzy $M[\mathcal{M}]$ (128), do której podstawimy wzory (178) i (179).

$$\begin{aligned} M[\mathcal{M}] &= \frac{1}{1-R_1r_2}\begin{pmatrix} p_1 & p_1R_1\\ P_2r_2 & P_2 \end{pmatrix} = && (180)\\ &= \frac{1}{1-(1-p[n-k])(1-p[k])}\begin{pmatrix} p[k] & p[k](1-p[n-k])\\ p[n-k](1-p[k]) & p[n-k] \end{pmatrix} && (181) \end{aligned}$$

By nie wykonywań niektórych obliczeń dwa razy, obliczmy tylko pierwszy wers macierzy.

$$M[\mathcal{M}][1,1] = \frac{p[k]}{1-(1-p[n-k])(1-p[k])} = \frac{p[k]}{p[k]+p[n-k]-p[k]p[n-k]} = \qquad (182)$$

$$= \frac{\frac{p_0}{(k-1)(1-p_0)+1}}{\frac{p_0}{(k-1)(1-p_0)+1} + \frac{p_0}{(n-k-1)(1-p_0)+1} - \frac{p_0}{(k-1)(1-p_0)+1}\frac{p_0}{(n-k-1)(1-p_0)+1}} = \tag{183}$$

$$= \frac{(n-k-1)(1-p_0)+1}{((n-k-1)(1-p_0)+1)+((k-1)(1-p_0)+1)-p_0} = \tag{184}$$

$$= \frac{(n-k)(1-p_0)+p_0}{n(1-p_0)+p_0} \tag{185}$$

Liczymy teraz $M[\mathcal{M}][1,2]$

$$M[\mathcal{M}][1,2] = \frac{(n-k)(1-p_0)+p_0}{n(1-p_0)+p_0}(1-p[n-k]) = \tag{186}$$

$$= \frac{(n-k)(1-p_0)+p_0}{n(1-p_0)+p_0}\frac{(n-k)(1-p_0)}{(n-k-1)(1-p_0)+1} = \tag{187}$$

$$= \frac{((n-k)(1-p_0)+p_0)}{n(1-p_0)+p_0}\frac{(n-k)(1-p_0)}{((n-k)(1-p_0)+p_0)} = \tag{188}$$

$$= \frac{(n-k)(1-p_0)}{n(1-p_0)+p_0} \tag{189}$$

Korzystając z operacji zamiany stron (w tym przypadku, zamieni ona tylko $k \rightleftharpoons (n-k)$) wyznaczamy całą macierz $M[\mathcal{M}]$

$$M[\mathcal{M}] = \begin{pmatrix} \frac{(n-k)(1-p_0)+p_0}{n(1-p_0)+p_0} & \frac{(n-k)(1-p_0)}{n(1-p_0)+p_0} \\ \frac{k(1-p_0)}{n(1-p_0)+p_0} & \frac{k(1-p_0)+p_0}{n(1-p_0)+p_0} \end{pmatrix} \tag{190}$$

Zapiszmy tą macierz przy pomocy r_0 oraz wyciągając przed nią wspólny mianownik

$$M[\mathcal{M}] = \frac{1}{n(1-p_0)+p_0}\begin{pmatrix} (n-k)(1-p_0)+p_0 & (n-k)(1-p_0) \\ k(1-p_0) & k(1-p_0)+p_0 \end{pmatrix} = \tag{191}$$

$$= \frac{1}{nr_0+1-r_0}\begin{pmatrix} (n-k)r_0+1-r_0 & (n-k)r_0 \\ kr_0 & kr_0+1-r_0 \end{pmatrix} \tag{192}$$

Przyjrzyjmy się tej macierzy uważnie. W układzie szkieł z danymi n i p_0, natężenie zależy liniowo od położenia. Cudownie!

3.3 Układy rozpraszaczy

Zdefiniujmy rozpraszacza jako lusterko z sumą odbijalności równą przepuszczalności, dla każdego kierunku. Tzn lusterko $\mathcal{A}$ jest rozpraszaczem wtedy i tylko wtedy gdy $p_1 = r_1$ i $p_2 = r_2$.

$$\mathcal{A} \text{ jest szkłem} \iff M[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} r_1 & r_1 \\ r_2 & r_2 \end{pmatrix} \tag{193}$$

Na razie ograniczmy się do rozważania dodawania n symetrycznych, jednakowych rozpraszaczy, czyli z $r_{1,k} = r_{2,k} = r_0$.

3.3.1 Dodawanie rozpraszaczy - odbijalność

Aby dodać dowolną liczbę takich samych, symetrycznych pochłaniaczy do siebie, będziemy postępować podobnie jak w poprzednim przypadku - starali się rozwiązać odpowiednie równanie rekurencyjne. Tym razem sprawa jest nieco trudniejsza, gdyż w ogólności suma dwóch rozpraszaczy nie jest rozpraszaczem. Niemniej, do rozwiązania równania na odbijalność nie musimy znać przepuszczalności sumy pochłaniaczy. Jak poprzednio, dodajemy po jednym lusterku po prawej stronie, korzystając ze wzoru (70)

$$\rho_2 = R_2 + \frac{P_1 P_2 r_2}{1-R_1 r_2} \tag{194}$$

$$r[n+1] = r_0 + \frac{r_0^2 r[n]}{1-r_0 r[n]} \tag{195}$$

$$r[n+1] = \frac{r_0 - r_0^2 r[n] + r_0^2 r[n]}{1-r_0 r[n]} \tag{196}$$

$$r[n+1] = \frac{r_0}{1-r_0 r[n]} \tag{197}$$

Zapisujemy $r[n]$ w postaci ilorazu kolejnych wyrazów ciągu $f[n]$

$$r[n] = \frac{f[n]}{f[n+1]} \tag{198}$$

Podstawiamy powyższe (198) do (197)

$$\frac{f[n+1]}{f[n+2]} = \frac{r_0}{1 - r_0 \frac{f[n]}{f[n+1]}} \tag{199}$$

$$\frac{f[n+1]}{f[n+2]} = \frac{r_0}{\frac{f[n+1]-r_0 f[n]}{f[n+1]}} \tag{200}$$

$$\frac{f[n+1]}{f[n+2]} = \frac{r_0 f[n+1]}{f[n+1] - r_0 f[n]} \tag{201}$$

$$f[n+1] - r_0 f[n] = r_0 f[n+2] \tag{202}$$

$$f[n+2] - \frac{1}{r_0} f[n+1] + f[n] = 0 \tag{203}$$

Jest to proste równanie różnicowe, które możemy rozwiązać metodą równania charakterystycznego (t.j. przyjmując rozwiązanie wykładnicze, bez straty ogólności).

$$\lambda^2 - \frac{1}{r_0}\lambda + 1 = 0 \tag{204}$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{r_0} \pm \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 4}}{2} \tag{205}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2r_0} + \sqrt{\frac{1}{4r_0^2} - 1} \tag{206}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2r_0} - \sqrt{\frac{1}{4r_0^2} - 1} \tag{207}$$

Skoro istnieją 2 rozwiązania, ogólnym rozwiązaniem jest ich liniowa kombinacja.

$$f[n] = c_1 \left(\frac{1}{2r_0} + \sqrt{\frac{1}{4r_0^2} - 1} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{2r_0} - \sqrt{\frac{1}{4r_0^2} - 1} \right)^n \tag{208}$$

$$f[n] = (2r_0)^{-n} \left(c_1 \left(1 + \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^n + c_2 \left(1 - \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^n \right) \tag{209}$$

By wyznaczyć współczynniki c_1 i c_2 musimy znać 2 różne wyrazy ciągu $f[n]$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$f[1] = 1 \tag{210}$$

Teraz należy wyznaczyć $f[n]$, korzystając ze sposobu przedstawienia za pomocą niego $r[1]$ (198)

$$r[1] = \frac{f[1]}{f[2]} \tag{211}$$

$$r_0 = \frac{1}{f[2]} \tag{212}$$

$$f[2] = \frac{1}{r_0} \tag{213}$$

Korzystając z (209), (210) i (213) otrzymujemy układ równań na c_1 i c_2

$$1 = (2r_0)^{-1} \left(c_1 \left(1 + \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^1 + c_2 \left(1 - \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^1 \right) \tag{214}$$

$$\frac{1}{r_0} = (2r_0)^{-2} \left(c_1 \left(1 + \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^2 + c_2 \left(1 - \sqrt{1 - 4r_0^2} \right)^2 \right) \tag{215}$$

Jest to układ równań liniowych z 2 niewiadomymi, więc szybko otrzymujemy

$$c_1 = \frac{r_0}{\sqrt{1-4r_0^2}} \tag{216}$$

$$c_2 = \frac{-r_0}{\sqrt{1-4r_0^2}} \tag{217}$$

Tym samym mamy pełny wzór na $f[n]$

$$f[n] = (2r_0)^{-n}\left(\frac{r_0}{\sqrt{1-4r_0^2}}\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n - \frac{r_0}{\sqrt{1-4r_0^2}}\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n\right) = \tag{218}$$

$$= \frac{r_0}{(2r_0)^n\sqrt{1-4r_0^2}}\left(\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n\right) \tag{219}$$

Wreszcie możemy wyliczyć $r[n]$

$$r[n] = \frac{\frac{r_0}{(2r_0)^n\sqrt{1-4r_0^2}}\left(\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n\right)}{\frac{r_0}{(2r_0)^{n+1}\sqrt{1-4r_0^2}}\left(\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}\right)} = \tag{220}$$

$$= 2r_0\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}} \tag{221}$$

Co jest ciekawe, dla $0 < r_0 < \frac{1}{2}$, $r[n]$ ma dobrze określoną granicę w nieskończoności. Możemy ją obliczyć

$$r_\infty = \lim_{n\to\infty} r[n] = \lim_{n\to\infty}\left(2r_0\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}}\right) = \tag{222}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2r_0\frac{\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n} - \frac{\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}}{\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n} - \frac{\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^n}}\right) = \tag{223}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2r_0\frac{1-\overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{1-4r_0^2}}{1+\sqrt{1-4r_0^2}}\right)^n}^{\to 0}}{1+\sqrt{1-4r_0^2}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{1-4r_0^2}}{1+\sqrt{1-4r_0^2}}\right)^n}_{\to 0}}\right) = \tag{224}$$

$$= 2r_0\frac{1}{1+\sqrt{1-4r_0^2}} \tag{225}$$

Można zapisać to jeszcze ładniej

$$r_\infty = \frac{2r_0}{1+\sqrt{1-4r_0^2}} \tag{226}$$

$$\tag{227}$$

3.3.2 Dodawanie rozpraszaczy - przepuszczalność

Teraz wypadałoby zająć się przepuszczalnością sumy rozpraszaczy.

$$\psi_1 = \frac{p_1 P_1}{1-R_1 r_2} \tag{228}$$

$$p[n+1] = \frac{r_0 p[n]}{1-r_0 r_[n]} \tag{229}$$

Wzór na $r[n]$ już znamy (221), więc możemy z niego skorzystać. Zanim jednak to zrobimy, skorzystajmy z podstawienia

$$\chi = \sqrt{1-4r_0^2} \tag{230}$$

$$r_0^2 = -\frac{\chi^2-1}{4} \tag{231}$$

Dzięki niemu będzie prościej przekształcić wzory (221) z (229)

$$p[n+1] = \frac{r_0 p[n]}{1-\frac{\chi^2-1}{2}\frac{(1+\chi)^n-(1-\chi)^n}{(1+\chi)^{n+1}-(1-\chi)^{n+1}}} = \tag{232}$$

$$= r_0 p[n]\frac{(1+\chi)^{n+1}-(1-\chi)^{n+1}}{(1+\chi-\frac{\chi^2-1}{2})(1+\chi)^n-(1-\chi-\frac{\chi^2-1}{2})(1-\chi)^n} = \tag{233}$$

$$= 2r_0 p[n]\frac{(1+\chi)^{n+1}-(1-\chi)^{n+1}}{(1+2\chi+\chi^2)(1+\chi)^n-(1-2\chi+\chi^2)(1-\chi)^n} = \tag{234}$$

$$= 2r_0 p[n]\frac{(1+\chi)^{n+1}-(1-\chi)^{n+1}}{(1+\chi)^{n+2}-(1-\chi)^{n+2}} \tag{235}$$

Powróćmy do zwykłego zapisu, czyli wyraźmy spowrotem χ przez r_0

$$p[n+1] = 2r_0 p[n]\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+2}} \tag{236}$$

Pamiętając, że $p[1]=r_0$, możemy wyrazić wzór na $p[n]$

$$p[n] = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2r_0\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+1}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+2}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+2}}\right) = \tag{237}$$

$$= (2r_0)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+1}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+2}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{k+2}}\right) \tag{238}$$

Nietrudno zauważyć, że k-ty mianownik skróci się z $k+1$ licznikiem. W takim razie zostanie tylko licznik dla $k=1$ oraz mianownik dla $k=n-1$

$$p[n] = (2r_0)^{n-1}\frac{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{2}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{2}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}} = \tag{239}$$

$$= \frac{4\sqrt{1-4r_0^2}(2r_0)^{n-1}}{\left(1+\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{1-4r_0^2}\right)^{n+1}} \tag{240}$$

Przykład 4 *Pewna grubość mgły może być rozpraszaczem - tyle samo przepuszcza co odbija w stronę świecącego latarką. Znając wzory na dodawanie rozpraszaczy można wyliczyć całkowite odbite natężenie - w szczególności w granicy.*

4 Ciągłe układy lusterek

4.1 Podstawy

Okazuje się, że równie przyjemnie można zajmować się ciągłymi układami lusterek. Mamy nieskończenie wiele takich samych lusterek $\mathcal{D}$, każde o grubość dx oraz macierzy

$$M[\mathcal{D}] = \begin{pmatrix} 1+\gamma_1 dx & \lambda_1 dx \\ \lambda_2 dx & 1+\gamma_2 dx \end{pmatrix} \tag{241}$$

By takie granice były rozsądne, dodanie dwóch lusterek $\mathcal{D}$ o grubości dx powinno dać także lusterko $\mathcal{D}$ o grubości $2dx$. Na razię sumę nazwijmy $\mathcal{C}$. Sprawdźmy, że w istocie $\mathcal{C} = \mathcal{D}[2dx]$

$$\psi_1 = \frac{(1+\gamma_1 dx)^2}{1-(\lambda_1 dx)(\lambda_2 dx)} \tag{242}$$

$$\rho_1 = \lambda_1 dx + \frac{(1+\gamma_1 dx)(1+\gamma_2 dx)(\lambda_1 dx)}{1-(\lambda_1 dx)(\lambda_2 dx)} \tag{243}$$

$$\psi_2 = \frac{(1+\gamma_2 dx)^2}{1-(\lambda_1 dx)(\lambda_2 dx)} \tag{244}$$

$$\rho_2 = \lambda_2 dx + \frac{(1+\gamma_1 dx)(1+\gamma_2 dx)(\lambda_2 dx)}{1-(\lambda_1 dx)(\lambda_2 dx)} \tag{245}$$

Wykonujemy mnożenia

$$\psi_1 = \frac{1+2\gamma_1 dx+\gamma_1^2 dx^2}{1-\lambda_1\lambda_2 dx^2} \tag{246}$$

$$\rho_1 = \lambda_1 dx + \frac{\lambda_1 dx + \lambda_1\gamma_1 dx^2 + \lambda_1\gamma_2 dx^2 + \lambda_1\gamma_1\gamma_2 dx^3}{1-\lambda_1\lambda_2 dx^2} \tag{247}$$

$$\psi_2 = \frac{1+2\gamma_2 dx+\gamma_2^2 dx^2}{1-\lambda_1\lambda_2 dx^2} \tag{248}$$

$$\rho_2 = \lambda_2 dx + \frac{\lambda_2 dx + \lambda_2\gamma_1 dx^2 + \lambda_2\gamma_2 dx^2 + \lambda_2\gamma_1\gamma_2 dx^3}{1-\lambda_1\lambda_2 dx^2} \tag{249}$$

Usuwamy wyrazy wyższego rzędu niż liniowe - są nieskończenie mniejsze niż dx.

$$\psi_1 = 1+\gamma_1 2dx \tag{250}$$

$$\rho_1 = \lambda_1 2dx \tag{251}$$

$$\psi_2 = 1+\gamma_2 2dx \tag{252}$$

$$\rho_2 = \lambda_2 2dx \tag{253}$$

Rzeczywiście $\mathcal{C} = \mathcal{D}[2dx]$.

W tym rozdziale będziemy „świecić” tylko z lewej strony wiązką o natężeniu 1. Dzięki liniowości i dowolności ustalanych współczynników nie czyni to straty ogólności rozważanych problemów. Przyjmując za początek układu $x = 0$ a za koniec $x = h$, możemy napisać

$$j_+[0] = 1 \tag{254}$$

$$j_-[h] = 0 \tag{255}$$

Przepuszczalnością i odbijalnością będą

$$j_+[h] = \psi \tag{256}$$

$$j_-[0] = \rho \tag{257}$$

4.2 Równanie różniczkowe ciągłego układu lusterek

Przepiszmy równanie różnicowe układu takich samych lusterek (131) i (132)

$$I_-[n] - r_1 I_+[n] = p_2 I_-[n+1] \tag{258}$$

$$I_+[n+1] - r_2 I_-[n+1] = p_1 I_+[n] \tag{259}$$

Spróbujmy zastosować go do opisu ciągłych układów. W tym celu zamiast $I_-[n]$ i $I_+[n]$ piszemy odpowiednio $j_-[x]$ i $j_+[x]$ (kwestia nazwy), a zamiast 1 - dx. Nie jest to żadna herezja, gdyż po prostu zmieniliśmy odległości (różnice położeń kolejnych) między lusterkami z 1 na dx. Od razu przepisujemy odpowiednie czynniki.

$$j_-[x] - \lambda_1 j_+[x]dx = (1+\gamma_2 dx) j_-[x+dx] \tag{260}$$

$$j_+[x+dx] - \lambda_2 j_-[x+dx]dx = (1+\gamma_1 dx) j_+[x] \tag{261}$$

Taką postać da się znacznie uprościć, dzielimy całość przez dx, przenosimy kilka wyrazów

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1 j_+[x] &= \frac{j_-[x+dx]-j_-[x]}{dx}+\gamma_2 j_-[x+dx] && (262)\\
\frac{j_+[x+dx]-j_+[x]}{dx}-\lambda_2 j_-[x+dx] &= \gamma_1 j_+[x] && (263)
\end{aligned}
$$

Tym sposobem dostajemy pochodne $j_+[x]$ i $j_-[x]$ po położeniu. Pamiętajmy, że $j_+[x+dx] \to j_+[x]$ oraz $j_-[x+dx] \to j_-[x]$.

$$
\begin{aligned}
-\lambda_1 j_+[x] &= j'_-[x]+\gamma_2 j_-[x] && (264)\\
j'_+[x]-\lambda_2 j_-[x] &= \gamma_1 j_+[x] && (265)
\end{aligned}
$$

Porządkujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
j'_+[x] &= \gamma_1 j_+[x]+\lambda_2 j_-[x] && (266)\\
j'_-[x] &= -\lambda_1 j_+[x]-\gamma_2 j_-[x] && (267)
\end{aligned}
$$

4.3 Rozwiązanie układu równań różniczkowych

Rozwiążmy układ równań (266) i (267) w najogólniejszym przypadku. Przepisujemy (266) w nieco innej formie

$$
\lambda_2 j_-[x] = j'_+[x]-\gamma_1 j_+[x] \qquad (268)
$$

Teraz różniczkujemy (266), po czym podstawiamy do niego $j_-[x]$ z (267)

$$
\begin{aligned}
j''_+[x] &= \gamma_1 j'_+[x]+\lambda_2 j'_-[x] && (269)\\
j''_+[x] &= \gamma_1 j'_+[x]+\lambda_2\left(-\lambda_1 j_+[x]-\gamma_2 j_-[x]\right) && (270)\\
j''_+[x] &= \gamma_1 j'_+[x]-\lambda_1\lambda_2 j_+[x]-\lambda_2\gamma_2 j_-[x] && (271)
\end{aligned}
$$

Do (271) podstawiamy (268)

$$
\begin{aligned}
j''_+[x] &= \gamma_1 j'_+[x]-\lambda_1\lambda_2 j_+[x]-\gamma_2\left(j'_+[x]-\gamma_1 j_+[x]\right) && (272)\\
0 &= j''_+[x]+(\gamma_2-\gamma_1)j'_+[x]+(\lambda_1\lambda_2-\gamma_1\gamma_2)j_+[x] && (273)
\end{aligned}
$$

Musimy jednak tutaj uważać, gdyż istnieje pewien szczególny przypadek.

4.3.1 Szczególny przypadek

Spójrzmy na pewną możliwość.

$$
\begin{aligned}
\gamma_2-\gamma_1 &= 0 && (274)\\
\lambda_1\lambda_2-\gamma_1\gamma_2 &= 0 && (275)
\end{aligned}
$$

Przekształćmy powyższe równania w dogodniejszą formę

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_2 && (276)\\
\gamma_1^2 &= \lambda_1\lambda_2 && (277)
\end{aligned}
$$

Teraz równanie (273) przybierze postać

$$
j''_+[x] = 0 \qquad (278)
$$

Tym samym ogólnym rozwiązaniem będzie

$$
j_+[x] = c_1+c_2 x \qquad (279)
$$

Z warunków początkowych wyliczamy związek współczynników

$$
1 = c_1+c_2 \qquad (280)
$$

Znajdźmy teraz równanie na $j_-[x]$ z (268)

$$\begin{aligned}\lambda_2 j_-[x] &= j_+'[x] - \gamma_1 j_+[x] &(281)\\ \lambda_1 j_-[x] &= c_2 - \gamma_1(c_1 + c_2 x) &(282)\\ \lambda_1 j_-[x] &= 1 - c_1 - \gamma_1 c_1 - (1-c_1)\gamma_1 x &(283)\end{aligned}$$

Ponownie skorzystajmy z warunków brzegowych, tym razem dla $j_-[h]$

$$\begin{aligned}\lambda_1 0 &= 1 - c_1 - \gamma_1 c_1 - (1-c_1)\gamma_1 h &(284)\\ 0 &= -\left(1+\gamma_1-\gamma_1 h\right) c_1 + 1 - \gamma_1 h &(285)\\ c_1 &= \frac{1-\gamma_1 h}{1+\gamma_1-\gamma_1 h} &(286)\end{aligned}$$

Otrzymujemy tym samym

$$\begin{aligned}j_+[x] &= \frac{1-\gamma_1 h}{1+\gamma_1-\gamma_1 h} - \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1-\gamma_1 h}x &(287)\\ \lambda_1 j_-[x] &= -\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1-\gamma_1 h} - \gamma_1\frac{1-\gamma_1 h}{1+\gamma_1-\gamma_1 h} + \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1-\gamma_1 h}\gamma_1 x &(288)\end{aligned}$$

Jeśli $\lambda_1 = 0$, to by równanie (288) było spełnione dla każdego x, $\gamma_1 = 0$, czyli

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 &(289)\\ j_+[x] &= 1 &(290)\\ j_-[x] &= 0 &(291)\end{aligned}$$

Czyli dostajemy funkcje stałe, co aż takie ciekawe nie jest. Jeśli $\lambda_1 \neq 0$

$$\begin{aligned}j_+[x] &= \frac{1}{1+\gamma_1-\gamma_1 h}\left(1-\gamma_1 h-\gamma_1 x\right) &(292)\\ j_-[x] &= \frac{\gamma_1}{\lambda_1}\frac{1}{1+\gamma_1-\gamma_1 h}\left(-2+\gamma_1+\gamma_1 x\right) &(293)\end{aligned}$$

Wychodzi tutaj zależność liniowa. „Niebezpieczny” wyraz w mianowniku odpowiada wzjamennemu wzmacnianiu się wiązek.

4.3.2 Pozostały przypadek

Zastosujmy oznaczenia

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma_2 - \gamma_1 &(294)\\ \beta &= \lambda_1\lambda_2 - \gamma_1\gamma_2 &(295)\end{aligned}$$

Rozwiążmy z równania charakterystycznego (273)

$$\begin{aligned}u^2 + \alpha u + \beta &= 0 &(296)\\ u_1 &= \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} &(297)\\ u_1 &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} &(298)\end{aligned}$$

Tym samym otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned}j_+[x] &= c_1 \mathrm{e}^{\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}x} + c_2 \mathrm{e}^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}} &(299)\\ j_-[x] &= \frac{1}{\lambda_2}\left(c_1\left(\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} - \gamma_1\right)\mathrm{e}^{\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}x} + c_2\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} - \gamma_1\right)\mathrm{e}^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}}\right) &(300)\end{aligned}$$

Jeśli zastosujemy podstawienia

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} &(301)\\ \phi &= \frac{\alpha}{2} + \gamma_1 &(302)\\ \kappa &= \mathrm{e}^{-h\sqrt{\alpha^2-4\beta}} &(303)\end{aligned}$$

Znajdziemy współczynniki c_1 i c_2

$$c_1 = \frac{\eta - \phi}{\eta(\kappa+1) + \phi(\kappa-1))} \quad (304)$$

$$c_2 = \frac{\eta + \phi}{\eta\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) + \phi\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} \quad (305)$$

4.4 Przepuszczalnośc i odbijalność

Mając powyższe można wyliczyć ψ i ρ.

$$\psi = \frac{2\mathbb{e}^{-\frac{\alpha}{2}h}\sqrt{\kappa}\eta}{\eta(\kappa+1) + \phi(\kappa-1)} \quad (306)$$

$$\rho = \frac{(\kappa-1)(\eta^2 - \phi^2)}{\lambda_2\left(\eta(\kappa+1) + \phi(\kappa-1)\right))} \quad (307)$$

4.5 Przepuszczalnośc i odbijalność

Ciekawy przypadek można otrzymać ($k, L \in \mathbb{R}$), gdy

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \mathbb{i}k \quad (308)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mathbb{i}L \quad (309)$$

W takim przypadku zachodzi pewna ciekawa właściwość, mianowicie

$$|\psi|^2 + |\rho|^2 = 1 \quad (310)$$

Przykład 5 *Energia niesiona przez falę elektromagnetyczną jest wprost proporcjonalna do kwadratu jej pola elektrycznego. Stosując opisy uwzględniające uśrednienie wynikające z okresowości fal świetlnych, związek* $|\psi|^2 + |\rho|^2 = 1$ *mówi, że substanacja, przez którą przechodzi światło, jest przeźroczysta.*

5 Zakończenie

Sądzę, że lusterka są ciekawym problemem do dalszej pracy, zwłaszcza że natknąłem się na wiele pytań, które dalej pozostają bez odpowiedzi. Interesująca może być czasowa ewolucja wiązek w układzie lusterek, a takze rozwinięcie problemu na więcej wymiarów.

Wydaje się, że przypadek (w równaniach ciągłych) $\mathbb{i}k$ i $\mathbb{i}L$ może mieć ciekawe zastosowania w opisie zachowania światłą w dielektrykach. Niestety, zabrakło mi czasu na przedstawienie wniosków, ani nawet większości wyliczeń.

Chciałbym podziękować Grzesiowi Łuczynie (V LO w Bielsku-Białej), za zasugrowanie podstawienia (230).