XXI Ogólnopolski Sejmik Matematyków
Jeziorowice, 20 - 23 V 2004

O mierzeniu figur wielowymiarowych

Piotr Migdał

V LO w Bielsku-Białej
ul. Słowackiego 45
tel/fax (033) 822 18 09

opiekun:
mgr Tomasz Szymczyk

Spis treści

1 Wprowadzenie

1.1 Streszczenie

Praca „O mierzeniu figur wielowymiarowych” zawiera sformułowane przez aytora ogólniejsze definicje n-figur, które w przypadkach dla 2 i 3 wymiarów są dobrze znanymi figurami.

Są to:

- n-kwadrat: dla n=2 - kwadrat, dla n=3 - sześcian
- n-trójkąt: dla n=2 - trójkąt, dla n=3 - czworościan
- n-kość: dla n=2 - kwadrat, dla n=3 - ośmiościan
- n-kula: dla n=2 - koło, dla n=3 - kula

Przedstawione jest rozszerzenie n-kwadratu na n-prostokąt,
a także szczególny przypadek trójkąta równobocznego.

Dla każdej z tych n-figur jest liczona n-objętość przez odpowiednie całkowanie danej (n-1)-figury.

Dla n-kwadrata i n-trójkąta jest liczona liczba p-ścian (które to dla p={0,1,2} są odpowiednio wierzchołkami, krawędziami i ścianami) metodami rekurencyjnymi lub kombinatorycznymi.

Dla n-kuli jest liczona n-powierzchnia, czyli (n-1)-objętość (n-1)-ściany, przez wykonanie odpowiedniego różniczkowania n-objętości n-kuli.

1.2 Wstęp

Możemy powiedzieć, że żyjemy w trójwymiarowym świcie. Albo dokładniej - że odczuwamy to coś, co nasz otacza, jako układ 3 wymiarów przestrzennych. Choć trzeba uczciwie przyznać, że zmysły, którymi poznajemy świat, nie pozwalają nam go ukazać w „całym swoim trójwymiarowym pięknie". Ten najbardziej przestrzenny, wzrok, pokazuje otoczenie w 2D + pewnym nieliniowym pomiarze odległości. Niesie to podobne informacje jak mapa z poziomicami - przedstawia tylko widzianą z pewnego miejsca powierzchnię wraz z jej głębokocią, natomiast nie pozwala „wniknąć w głąb". Dopiero nasz mózg potrafi przetworzyć takie skąpe dane na rzeczywistość 3D.

Warto zwrócić uwagę, że większość ludzi najlepiej sobie radzi z 2D - w 3D czasem trudnej sobie coś wyobrazić, szczególnie gdy chodzi obroty, kąty itp. Jednak dla matematyki żadna liczba wymiarów nie jest wyróżniona. 3 jest tu równie „naturalne" jak 6 czy 11.

W poniższej pracy chciałbym przedstawić kilka uogólnień figur, których szczególnymi przypadkami w 2 wymiarach są dobrze znane nam figury, takie jak kwadrat, trójkąt czy prostokąt. A także kilka innych, które łatwo i sensownie można przedstawić dla n-wymiarowej przestrzeni.

Przy definicjach będę wybierane najwygodniejsze układy.

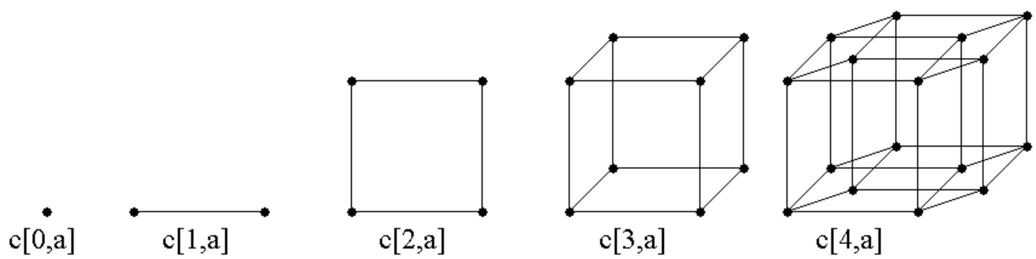
2 O mierzenieniu figur wielowymiarowych

2.1 n-kwadrat

n-kwadrat o boku $a \in R_+$ oznaczamy jako $c[n, a]$ i definujemy następująco:

$$c[n, a] = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : \; 0 \leqslant x_i \leqslant a, \; i \in \{1, ..., n\}\}$$

c[n] oznacza zbiór wszystkich c[n,a]



Rysunek 1: n-kwadraty do 4 wymiarów

Łatwo możemy sprawdzić, że dla $n = 2$ powyższa definicja pokrywa się z definicją kwadratu, a dla $n = 3$ - z definicją sześcianu.

2.1.1 n-objętość n-kwadratu

n-objętość $c[n, a]$ będziemy oznaczać jako $Vc[n, a]$.

Z definicji wynika, że 0-kwadrat wypełnia całą przestrzeń 0-wymiarową, gdyż w tym przypadku jest to zbiór wszytskich punktów, czyli zachodzi:

$$Vc[o, a] \;=\; 1 \tag{1}$$

Skoro tworząc $c[n + 1]$ przeciągamy $c[n]$ po dodanym wymiarze od 0 do a, możemy napisać:

$$Vc[n + 1, a] \;=\; \int_0^a V[n, a] \cdot dx \tag{2}$$

$$Vc[n + 1, a] \;=\; [V[n, a] \cdot x]_0^a \tag{3}$$

$$Vc[n + 1, a] \;=\; V[n, a] \cdot a \tag{4}$$

Przesuwamy zmienna wymiarową $n \to n-1$:

$$Vc[n,a] \quad = \quad V[n-1,a] \cdot a \tag{5}$$

Redukując prawą stronę (5) za pomocą tego samego równania $(n-1)$ razy oraz podstawiając (1) otrzymujemy:

$$Vc[n,a] \quad = \quad a^n \tag{6}$$

Co jest dość oczywistym wynikiem.

Z kolei łatwo zauważyć, że rozciągając $c[n,a]$, niekoniecznie tak samo dla każdego wymiaru, otrzymujemy n-prostokąt $p[n, a_1, ..., a_n]$, któremy możemy zdefiniować następująco:

$$p[n, a_1, ..., a_n] = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : \; 0 \leqslant x_i \leqslant a_i, \; i \in \{1, ..., n\}\}$$

Z kolei jego n-objętością będzie:

$$Vp[n, a_1, ..., a_n] \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{7}$$

2.1.2 liczba p-ścian n-kwadratu

p-wymiarową ścianą n-wymiarowego kwadratu zwiemy zbiór punktów, które spełniają $(n-p)$ razy równość w definicji n-kwadratu. Liczbę spełnionych równości w def. $c[n,a]$ nazwijmy k.
Liczbę różnych możliwości uzyskania p-ściany n-kwadratu w równaniu definiującym $c[n,p]$ oznaczamy jako $Fc[n,p]$.

Tworząc $c[n+1]$ z $c[n]$ przeciągamy $c[n]$ po dodanym wymiarze. Wynika z tego, że liczba ścian każdego wymiaru ulega podwojeniu, gdyż dla $(x_{n+1} = 0) \vee (x_{n+1} = a)$ mamy 2 sytuacje, w których te same ściany zostały niezmienione, ponieważ:

$$(n+1) - p = k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n - p = k \tag{8}$$

Z kolei gdy $(x_{n+1} \neq 0) \wedge (x_{n+1} \neq a)$ powstają ściany o $(p-1)$ wymiarze, gdyż:

$$(n+1) - p = k \quad \Leftrightarrow \quad n - (p-1) = k \tag{9}$$

Możemy (8) i (9) zapisać w postaci równania rekurencyjnego:

$$Fc[n+1,p] \quad = \quad 2 \cdot Fc[n,p] + Fc[n,p-1] \tag{10}$$

Pamiętając, że $Fc[0,0] = 1$ oraz, że nie ma punktów z $p < 0$ możemy napisać następujące równanie rekurencyjne:

$$Fc[n+1,0] = 2 \cdot F[n,0] \quad \wedge \quad Fc[0,0] = 1 \tag{11}$$

Przesuwając zmienną $n \to n-1$

$$Fc[n,0] = 2 \cdot F[n-1,0] \quad \wedge \quad Fc[0,0] = 1 \tag{12}$$

oraz podstawiając do prawej strony (12) $(n-1)$ razy to samo równanie otrzymujemy:

$$Fc[n,0] \quad = \quad 2^n \tag{13}$$

Albo pisząc bardziej „po ludzku": liczba wierzchołków n-kwadratów jest równa 2^n.

Liczbę ścian w ogólniejszym przypadku możemy próbować liczyć w oparciu o (10) i (13), jednak wygodniej jest przyjąć następującą metodę:

Mając $c[n]$ i wiedząc, że $Fc[n,p]$ jest liczbą możliwych kombinacji gdy w $n-p$ równaniach definiującycg $c[n]$ mamy równość. Równość ta może być po prawej lub lewej stronie (czyli $(x_i = 0) \vee (x_i = a)$, co daje 2 możliwości na każdy wymiar), wobec czego możemy napisać:

$$Fc[n,p] \quad = \quad \binom{n}{n-p} \cdot 2^{n-p} \tag{14}$$

$$Fc[n,p] \quad = \quad \binom{n}{p} \cdot 2^{n-p} \tag{15}$$

Do tego samego wyniku można dojść także w oparciu o (13), licząc w ilu różnych p-przestrzeniach może powstać p-ściana n-kwadratu zaczynająca się w danym punkcie i dzieląc wszystko przez liczbę wierzchołków tej p-ściany (gdyż policzyliśmy je tyle razy więcej, ile jest na niej wierzchołków). Musimy pamiętać, że mając n wymiarów i p-figurę, możemy ją umieścić w liczbie

p-przestrzeni będącej kombinacją $\binom{n}{p}$. Mnożymy liczbę punktów razy liczbę kombinacji i dzielimy przez wierzchołki ścian:

$$Fc[n,p] = 2^n \cdot \binom{n}{p} \cdot (\frac{1}{2})^p \quad (16)$$

$$Fc[n,p] = \binom{n}{p} \cdot 2^{n-p} \quad (17)$$

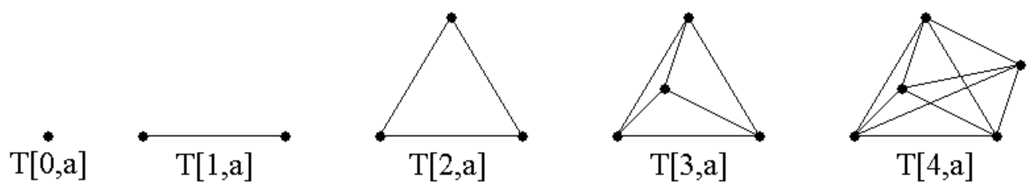
Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $(p \in \{0,1,2\}) \wedge (n \in \{2,3\})$ mamy odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi oraz ścian kwadratu i sześcianu.

2.2 n-trójkąt

n-trójkąt o danych wysokościach $h_i \in R_+$ oznaczamy $t[n, h_1, ..., h_n]$ i definiujemy jako najmniejszy (=będący częścią wspólną wszystkich) zbiór wypukły zawierający $(n+1)$ punktów nie dających się zamknąć w $(n-1)$-przestrzeni. Wysokością h_i nazywamy odległość $(i+1)$-tego punktu od $(i-1)$-przestrzeni poprzednich zawierającej (i) punktów. Należy zwrócić uwagę, że różnie numerując punkty możemy otrzymać różne wysokości.

Zbiór wszystkich $t[n, h_1, ..., h_n]$ oznaczamy jako $t[n]$.

n-trójkąt równoboczny oznaczamy jako $T[n, a]$ i definiujemy jako $t[n, h_1, ..., h_n]$ w którym odległość między każdymi różnymi punktami jest taka sama.



Rysunek 2: n-trójkąty równoboczne do 4 wymiarów

Łatwo możemy zauważyć że dla 2 i 3 wymiarów n-trójkąt jest odpowiednio trójkątem i czworościanem.

2.2.1 n-objętość n-trójkąta

Zajmimy się n-objętością $t[n, h_1, ..., h_n]$, którą nazywamy $Vt[n, h_1, ..., h_n]$.
Tworząc $t[n+1, h_1, ..., h_{n+1}]$ z $t[n, h_1, ..., h_n]$ dodajemy jeden wymiar oraz jeden punkt M.
$Vt[n+1, h_1, ..., h_{n+1}]$ uzyskamy całkując wzdłuż h_{n+1} (pamiętając, że jest to prostopadłe do $t[n, h_1, ..., h_n]$) n-trójkąt o n-objętości $Vt[n, \frac{x}{h_{n+1}} h_1, ..., \frac{x}{h_{n+1}} h_n]$ (każdy wymiar zmienia się liniowo, gdyż punkt M jest połączony odcinkami z wszystkimi punktami $t[n, h_1, ..., h_n]$), po x, od 0 do h_{n+1}.
Skoro wszystkie wymiary są proporcjonalne do $\frac{x}{h_{n+1}}$, możemy zapisać:

$$Vt[n+1, h_1, ..., h_{n+1}] = \int_0^{h_{n+1}} Vt[n, h_1, ..., h_n] \cdot \frac{x^n}{h_{n+1}^n} \cdot dx \tag{18}$$

$$Vt[n+1, h_1, ..., h_{n+1}] = \left[\frac{1}{n+1} Vt[n, h_1, ..., h_n] \frac{x^{n+1}}{h_{n+1}^n}\right]_0^{h_{n+1}} \tag{19}$$

$$Vt[n+1, h_1, ..., h_{n+1}] = \frac{1}{n+1} Vt[n, h_1, ..., h_n] \cdot h_{n+1} \tag{20}$$

Przesuwamy zmienną $n \to n-1$:

$$Vt[n, h_1, ..., h_n] = \frac{1}{n+1} Vt[n-1, h_1, ..., h_{n-1}] \cdot h_{n+1} \tag{21}$$

Teraz redukujemy prawą stronę równania (21) $(n-1)$ razy, przy tym pamiętając, że $Vt[0]$ jest 1 punktem:

$$Vt[n, h_1, ..., h_n] = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} h_i \tag{22}$$

Teraz możemy policzyć $VT[n, a]$.
Droga do tego wiedzie przez wyznaczenie kolejnych wysokości. Dla rozróżnienia od przypadku dowolnych wysokości, będziemy je oznaczać jako H_i

By odległości były takie same między każdą parą różnych punktów możemy postąpić następująco:
Tworzymy $(n+1)$ punktów w $(n+1)$-przestrzeni, każdy z jedną, różną od innych, współrzędną b, a pozostałymi równymi 0.
Mamy więc:

$$\overbrace{(b\ 0\ 0\ ...\ 0\ 0\ 0)}^{n+1} \tag{23}$$

$$(0\ b\ 0\ ...\ 0\ 0\ 0) \tag{24}$$

$$(0\ 0\ b\ ...\ 0\ 0\ 0) \tag{25}$$

$$... \tag{26}$$

$$(0\ 0\ 0\ ...\ b\ 0\ 0) \tag{27}$$

$$(0\ 0\ 0\ ...\ 0\ b\ 0) \tag{28}$$

$$(0\ 0\ 0\ ...\ 0\ 0\ b) \tag{29}$$

Odległość między 2 różnymi punktami jest równa:

$$a = \sqrt{b^2 + b^2} \tag{30}$$
$$a = b \cdot \sqrt{2} \tag{31}$$

Obierając za punkt M punkt (29), wysokość H_n będzie miała postać:

$$H_n = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2 + (q_{n+1} - b)^2} \tag{32}$$

Skoro punkt zrzutowania wysokości Q (o współrzędnych jak w (32)) musi zawierać się w $T[n-1, a]$, więc:

$$q_{n+1} = 0 \tag{33}$$

Dodatkowo, skoro żaden punkt $T[n-1, a]$ nie jest wyróżniony, pozostałe współrzędne muszą być sobie równe:

$$q_1 = q_2 = ... = q_{n-1} = q_n \tag{34}$$

Znając z (23)-(29) współrzędne pozostałych punktów i nadal pamiętając, że Q musi być w $T[n-1, a]$ możemy zapisać równanie $(n-1)$-przestrzeni, w której znajduje się dany $T[n-1, a]$:

$$q_1 + q_2 + ... + q_{n-1} + q_n = b \tag{35}$$

Podstawiając do tego współrzędną taką samą q dla wszytskich x_i otrzymujemy:

$$n \cdot q = b \tag{36}$$
$$q = \frac{b}{n} \tag{37}$$

Co możemy podstawić do wzoru na wysokość (32), pamiętając także (33):

$$H_n = \sqrt{n \cdot q^2 + b^2} \tag{38}$$
$$H_n = \sqrt{n \cdot (\frac{b}{n})^2 + b^2} \tag{39}$$
$$H_n = b \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \tag{40}$$
$$H_n = b \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \tag{41}$$

Pamiętając, że (31) zapisujemy:

$$H_n = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \tag{42}$$

Jak wcześniej postulowaliśmy:

$$T[n,a] = t[n, H_1, ..., H_n] \tag{43}$$

Zatem zachodzi też:

$$VT[n,a] = Vt[n, H_1, ..., H_n] \tag{44}$$

$$VT[n,a] = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} H_i \tag{45}$$

Zajmijmy się upraszczaniem iloczynu:

$$\textstyle\prod_{i=1}^{n} H_i = \tag{46}$$

$$= \textstyle\prod_{i=1}^{n} a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \tag{47}$$

$$= 2^{-n/2} \cdot a^n \cdot (\textstyle\prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{n+1}{n}}) = \tag{48}$$

$$= 2^{-n/2} \cdot a^n \cdot (\textstyle\prod_{i=1}^{n} \sqrt{n+1}) \cdot (\prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n}}) = \tag{49}$$

$$= 2^{-n/2} \cdot a^n \cdot (\textstyle\prod_{i=1}^{n} \sqrt{n+1}) \cdot (\prod_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n+1}}) = \tag{50}$$

$$= 2^{-n/2} \cdot a^n \cdot (\sqrt{n+1} \cdot \tfrac{1}{1}) = \tag{51}$$

$$= 2^{-n/2} \cdot a^n \cdot \sqrt{n+1} \tag{52}$$

Co podstawiamy do (45) i tym samym zapisujemy ostateczny wzór na n-objętość $T[n,a]$:

$$VT[n,a] = \frac{\sqrt{n+1}}{n!} \cdot 2^{-n/2} \cdot a^n \tag{53}$$

2.2.2 liczba p-ścian n-trójkąta

p-ścianą n-trójkąta jest najmniejszy zbiór wypukły zawierający $(p+1)$ wierzchołków i ich liczba jest oznaczamy $Ft[n,p]$.

By policzyć $Ft[n,p]$ wystarczy policzyć kombinację $(p+1)$ w liczbie wszytskich punktów $t[n]$ czyli $(n+1)$.
Otrzymujemy:

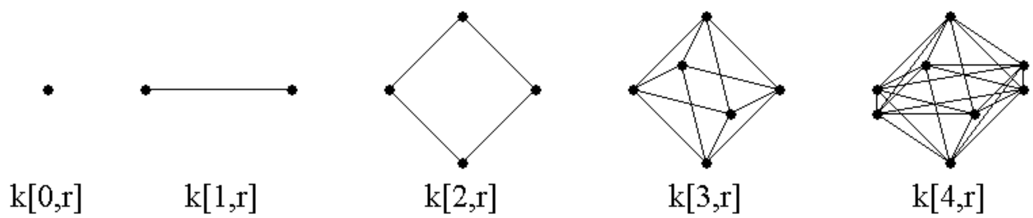
$$Ft[n,p] \quad = \quad \binom{n+1}{p+1} \tag{54}$$

Łatwo sprawdzamy, że dla $(p \in \{0,1,2\}) \wedge (n \in \{2,3\})$ mamy odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi oraz ścian trójkąta i czworościanu.

2.3 n-kość

n-kość o promieniu $r \in R_+$ oznaczamy jako $d[n, a]$ i definujemy następująco

$$k[n, r] = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : \ 0 \leqslant |x_i| \leqslant r \ \ i \in \{1, ..., n\}\}$$



Rysunek 3: n-kość do 4 wymiarów

Dla 2 wymiarów jest to kwadrat, dla 3 - ośmiościan.

2.3.1 n-objętość n-kości

Zauważmy, że gdy $x_1, ..., xn \geqslant 0$ mamy trójkąta o $h_1, ..., h_n = r$
Jednak w każdym wymiarze mamy 2 przypadki - $(x_i \geqslant 0) \vee x_i < 0$. Skoro przypadek równości lub jej braku nie daje wkładu do n-objętości, oznaczając n-objętość $k[n, r]$ jako $Vk[n, r]$, a także pamiętając (22):

$$Vk[n, r] = 2^n \cdot Vt[n, \overbrace{r, ..., r}^{n}] \tag{55}$$

$$Vk[n, r] = 2^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} r \tag{56}$$

$$Vk[n, r] = \frac{2^n}{n!} \cdot r^n \tag{57}$$

2.4 n-kula

n-kule o promieniu $r \in R_+$ oznaczamy jako $s[n, r]$ i definiujemy jako zbiór punktów, których odległość od początku układu współrzędnych jest mniejsza bądź równa promieniowi r.

Definicja analityczna $s[n, r]$ jest następująca:

$$s[n, r] = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2\}$$

Zauważmy, że w 2 wymiarach to koło, a w 3 - kula.

2.4.1 n-objętość n-kuli

n-objętość n-kuli o promieniu r oznaczamy jako $Vs[n, r]$.

Zauważamy, że dla $n = 0$ $n-$kula wypełnia całą przestrzeń:

$$Vs[0, r] = 1 \tag{58}$$

Pamiętamy, że dodając dodatkowy wymiar i tworząc $s[n + 1, r]$ z $s[n, r]$, przesuwamy kulę $s[n, t]$ o zmiennym promieniu t wzdłuż nowego wymiaru.

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 - x_{n+1}^2 \tag{60}$$

$$t = \sqrt{r^2 - x_{n+1}^2} \tag{61}$$

Całkujemy:

$$Vs[n + 1, r] = \int_{-r}^{r} V[n, r] \cdot \frac{t^n}{r^n} \cdot dx_{n+1} \tag{62}$$

$$Vs[n + 1, r] = \int_{-r}^{r} V[n, r] \cdot \frac{(r^2 - x_{n+1}^2)^{n/2}}{r^n} \cdot dx_{n+1} \tag{63}$$

$$\tag{64}$$

Możemy wyciągnąć stałe czynniki przed nawias. Łatwo też zauważyć, że kula jest symetryczna względem punktu 0, wobec czego możemy 2 razy przecałkować od 0 do r.

$$Vs[n+1,r] = 2\cdot\frac{V[n,r]}{r^n}\cdot\int_0^r (r^2-x_{n+1}^2)^{n/2}\cdot dx_{n+1} \tag{65}$$

$$Vs[n+1,r] = 2\cdot V[n,r]\cdot\int_0^r (1-(\frac{x_{n+1}}{r})^2)^{n/2}\cdot dx_{n+1} \tag{66}$$

Teraz robimy następujące podstawienie, wraz z jego konsekwencjami:

$$x_{n+1} = r\cdot\sin(\alpha) \tag{67}$$

$$dx_{n+1} = r\cdot\cos(\alpha)\cdot d\alpha \tag{68}$$

$$0 = r\cdot\sin(0) \tag{69}$$

$$r = r\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) \tag{70}$$

$$Vs[n+1,r] = 2\cdot V[n,r]\cdot\int_0^{\pi/2}(1-(\frac{r\cdot\sin(\alpha)}{r})^2)^{n/2}\cdot r\cdot\cos(\alpha)\cdot d\alpha \tag{71}$$

$$Vs[n+1,r] = 2\cdot V[n,r]\cdot\int_0^{\pi/2}(\cos^2(\alpha))^{n/2}\cdot r\cdot\cos(\alpha)\cdot d\alpha \tag{72}$$

$$Vs[n+1,r] = 2\cdot V[n,r]\cdot r\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}(\alpha)\cdot d\alpha \tag{73}$$

Skorzystamy ze wzoru (75) słusznego dla $m \geqslant 2$, wziętego z [3]:

$$\int\cos^m(x)\cdot dx = \frac{1}{m}\cdot\sin(x)\cdot\cos^{m-1}(x)+\frac{m-1}{m}\cdot\int\cos^{m-2}(x)\cdot dx \tag{74}$$

Który to udowadniamy różniczkując obie strony po $\frac{d}{dx}$ i równoważnymi przekształceniami przechodząc z prawej strony do lewej:

$$\cos^m(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}[\frac{1}{m}\sin(\alpha)\cdot\cos^{m-1}(\alpha)]+\frac{m-1}{m}\cos^{m-2}(\alpha) \tag{75}$$

$$\frac{d}{d\alpha}[\tfrac{1}{m}\sin(\alpha)\cdot\cos^{m-1}(\alpha)]+\tfrac{m-1}{m}\cos^{m-2}(\alpha) = \tag{76}$$

$$= \tfrac{1}{m}(\tfrac{d[\sin(\alpha)]}{d\alpha}\cdot\cos^{m-1}(\alpha)+\sin(\alpha)\cdot\tfrac{d[\cos^{m-1}(\alpha)]}{d\alpha})+\tfrac{m-1}{m}\cos^{m-2}(\alpha) = \tag{77}$$

$$= \tfrac{1}{m}(\cos^m(\alpha)-(m-1)\cdot\sin^2(\alpha)\cdot\cos^{m-2}(\alpha))+\tfrac{m-1}{m}\cos^{m-2}(\alpha) = \tag{78}$$

$$= \tfrac{1}{m}\cdot(\cos^m(\alpha)+(m-1)\cdot\cos^{m-2}(\alpha)\cdot(1-\sin^2(\alpha))) = \tag{79}$$

$$= \cos^m(\alpha) \tag{80}$$

Dodatkowo wiedząc, że gdy $m \geqslant 2$

$$x \in \{0, \frac{\pi}{2}\} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) \cdot \cos^{m-1}(\alpha) = 0 \tag{81}$$

Możemy opuścić (jako równe zero w sumie) powyższe wyrażenie, skoro pojawia się w różnicy $f(\frac{\pi}{2}) - f(0)$.

$$\sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos^{m-1}(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \cdot \cos^{m-1}(0) \;\; = \;\; 0 \tag{82}$$

Rozważmy teraz parzystość $(n+1)$.
Gdy $(n+1)\ mod\ 2\ =\ 0$, korzystając z (73) i (74) redukowanego przy pomocy swojej prawej strony oraz (82) piszemy:

$$\begin{aligned} Vs[n+1,r] &= 2 \cdot V[n,r] \cdot r \cdot \left[(\frac{n}{n+1})(\frac{n-2}{n-1})...(\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) \cdot \alpha \right]_0^{\pi/2} && (83) \\ Vs[n+1,r] &= 2 \cdot V[n,r] \cdot r \cdot (\frac{n}{n+1})(\frac{n-2}{n-1})...(\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi}{2} && (84) \\ Vs[n+1,r] &= \pi \cdot V[n,r] \cdot r \cdot (\frac{n}{n+1})(\frac{n-2}{n-1})...(\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) && (85) \end{aligned}$$

W przeciwnym wypadku, gdy $(n+1)\ mod\ 2\ =\ 1$, korzystając z (73), (74), (82) oraz $\int \cos(\alpha) d\alpha = \sin(\alpha)$ mamy:

$$\begin{aligned} Vs[n+1,r] &= 2 \cdot V[n,r] \cdot r \cdot \left[(\frac{n}{n+1})(\frac{n-2}{n-1})...(\frac{4}{5})(\frac{2}{3}) \cdot \sin(\alpha) \right]_0^{\pi/2} && (86) \\ Vs[n+1,r] &= 2 \cdot V[n,r] \cdot r \cdot (\frac{n}{n+1})(\frac{n-2}{n-1})...(\frac{4}{5})(\frac{2}{3}) && (87) \end{aligned}$$

Możemy zapisać (85) i (87) w ładniejszej postaci:

$$\begin{aligned} Vs[n+1,r] &= \pi \cdot V[n,r] \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{2i-1}{2i}, n\ mod 2 = 1 && (88) \\ Vs[n+1,r] &= 2 \cdot V[n,r] \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{n/2} \frac{2i}{2i+1}, n\ mod 2 = 0 && (89) \\ & && (90) \end{aligned}$$

Teraz obliczymy $Vs[1,r]$ z (89):

$$\begin{aligned} Vs[1,r] &= 2 \cdot Vs[0,r] \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{0} \frac{2i}{2i+1} && (91) \\ Vs[1,r] &= 2 \cdot r && (92) \end{aligned}$$

Co jest zwykłym odcinkiem o długości $2 \cdot r$.

Teraz mozemy przystąpić do liczenia $V[n+2]$.
Zacznijmy od przypadku n parzystego. Wtedy $(n+1)$ jest nieparzyste.

$$Vs[n+2,r] = \pi \cdot V[n+1,r] \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{(n+2)/2} \frac{2i-1}{2i} \tag{93}$$

$$Vs[n+2,r] = 2 \cdot \pi \cdot V[n,r] \cdot r^2 \cdot (\prod_{i=1}^{(n+2)/2} \frac{2i-1}{2i}) \cdot (\prod_{i=1}^{n/2} \frac{2i}{2i+1}) \tag{94}$$

Poprzekształcajmy iloczyn iloczynów z (94):

$$(\prod_{i=1}^{(n+2)/2} \tfrac{2i-1}{2i}) \cdot (\prod_{i=1}^{n/2} \tfrac{2i}{2i+1}) = \tag{95}$$

$$= (\prod_{i=1}^{(n+2)/2}(2i-1)) \cdot (\prod_{i=1}^{n/2} \tfrac{1}{2i+1}) \cdot (\prod_{i=1}^{(n+2)/2} \tfrac{1}{2i}) \cdot (\prod_{i=1}^{n/2} 2i) = \tag{96}$$

$$= (\prod_{i=0}^{n/2}(2i+1)) \cdot (\prod_{i=1}^{n/2} \tfrac{1}{2i+1}) \cdot \tfrac{1}{n+2} = \tag{97}$$

$$= \tfrac{1}{n+2} \tag{98}$$

Co jest znacznie upraszcza sprawę. Teraz podstawiamy (98) do (94):

$$Vs[n+2,r] = 2 \cdot \pi \cdot V[n,r] \cdot r^2 \cdot \frac{1}{n+2} \tag{99}$$

Analogicznie postępujemy z przypadkiem, gdy n jest nieparzyste, co daje parzyste $(n+1)$.

$$Vs[n+2,r] = 2 \cdot V[n+1,r] \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{2i}{2i+1} \tag{100}$$

$$Vs[n+2,r] = 2 \cdot \pi \cdot V[n,r] \cdot r^2 \cdot (\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{2i}{2i+1}) \cdot (\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{2i-1}{2i}) \tag{101}$$

Upraszczamy iloczyny z (101):

$$(\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \tfrac{2i}{2i+1}) \cdot (\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \tfrac{2i-1}{2i}) = \tag{102}$$

$$= (\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \tfrac{1}{2i+1}) \cdot (\prod_{i=1}^{(n+1)/2}(2i-1)) = \tag{103}$$

$$= (\prod_{i=1}^{(n+1)/2} \tfrac{1}{2i+1}) \cdot (\prod_{i=0}^{(n-1)/2}(2i+1)) = \tag{104}$$

$$= \tfrac{1}{n+2} \tag{105}$$

Podstawiamy (105) do (101):

$$Vs[n+2,r] \quad = \quad 2\pi \cdot V[n,r] \cdot r^2 \cdot \frac{1}{n+2} \tag{106}$$

Zauważamy, że równanie (99) i (106) mają taką samą postać. Jednak dalej rozważamy (99) oraz (106) oddzielnie, gdyż redukując wymiary z gradacją 2 w przypadku n parzystego dojdziemy do 0, w przeciwnym — do 1.

W równaniach (99) i (106) przesuwamy zmienną $n \to n-2$. Znamy $Vs[0,r]$ i $Vs[1,r]$, wobec tego zmiana warunku na $n \geqslant 2$ nie przeszkodzi w obliczeniach.
Dla przejrzystości stosujemy oznaczenia $m \in N$:

$$n = 2m, \quad n \; mod \; 2 = 0 \tag{107}$$
$$n = 2m+1, \quad n \; mod \; 2 = 1 \tag{108}$$

Co daje:

$$Vs[2m,r] \quad = \quad 2\pi \cdot V[2m-2,r] \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2m} \tag{109}$$
$$Vs[2m+1,r] \quad = \quad 2\pi \cdot V[2m-1,r] \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \tag{110}$$

Teraz redukujemy prawą stronę (109) i (110) $(m-1)$ razy.

$$Vs[2m,r] \quad = \quad (2\cdot\pi)^m \cdot 1 \cdot r^{2m} \cdot \frac{1}{(2m)(2m-2)...(4)(2)} \tag{111}$$
$$Vs[2m+1,r] \quad = \quad (2\cdot\pi)^m \cdot 2r \cdot r^{2m} \cdot \frac{1}{(2m+1)(2m-1)...(3)(1)} \tag{112}$$

Wyciągając w (111) 2^m przed nawias iloczyn i skracając to, stosując w (111) silnię oraz w (112) dwusilnię (iloczyn z gradacją 2, do 1 dla liczb nieparzystych; !!), możemy zapisać ostatecznie powyższe wzory w następującej postaci (sprawdzając także, że $V[0,r]$ i $V[1,r]$ są odpowiednimi przypadkami (113) i (114)):

$$Vs[2m,r] \quad = \quad \frac{1}{m!} \cdot \pi^m \cdot r^{2m} \tag{113}$$
$$Vs[2m+1,r] \quad = \quad \frac{1}{(2m+1)!!} \cdot 2^{m+1} \cdot \pi^m \cdot r^{2m+1} \tag{114}$$

Spawdźmy wzory (113) i (114) dla $n \leqslant 6$

$$\begin{aligned} Vs[0,r] &= 1 && (115)\\ Vs[1,r] &= 2r && (116)\\ Vs[2,r] &= \pi r^2 && (117)\\ Vs[3,r] &= \frac{4}{3}\pi r^3 && (118)\\ Vs[4,r] &= \frac{1}{2}\pi^2 r^4 && (119)\\ Vs[5,r] &= \frac{8}{15}\pi^2 r^5 && (120)\\ Vs[6,r] &= \frac{1}{6}\pi^3 r^6 && (121) \end{aligned}$$

Jak widać w 2 wymiarach (117) jest dobrze znanym wzorem na powierzchnię („tą zwykła") koła.
Z kolei (118) reprezentuje równie oczywiscty wzór na objętość kuli.
Dość prosto prezentuje się postać 4-objętości 4-kuli, tej pierwszej „już poza zasięgiem naszych zmysłów i intuicji".

2.4.2 n-powierzchnia n-kuli

Znając już n-objętość n-wymiarowej kuli teraz nasuwa się pytanie - a co z jej n-powierzchnią?
n-powierzchnią n-kuli nazywamy rozmiar wszytkich takich punktów, które w rówaniu definiującym n-kulę spełniają równość i oznaczamy ją jako $Ps[n,r]$

Skoro promień jest prostopadły do $Ps[n,r]$, co wynika z anizotropowości (brak wyróżnionego kierunku) względem jej środka, zwiększając promień o dr, obliczając przyrost n-objętości $Vs[n,r+dr]-Vs[n,r]$ otrzymujemy pewną nieskończenie małą n-objętość, która przedstawiamy jako:

$$Ps[n,r]\cdot dr = Vs[n,r+dr]-Vs[n,r] \qquad (122)$$

Możemy wymnożyć $Ps[n,r]\cdot dr$ otrzymując n-objętość, gdyż w granicy $dr \to 0$ dla każdego nieskończenie małego kawałka n-powierzchni mamy do czynienia z przemnażaniem $(n-1)$-objętości $c[n-1,dr]$ razy kolejny bok dr.
Zapisując to jako:

$$Ps[n,r] = \frac{Vs[n,r+dr]-Vs[n,r]}{dr} \qquad (123)$$

Mamy do czynienia ze zwykła różniczką po $\frac{d}{dr}$, co możemy przedstawić przypadku jako:

$$Ps[n,r] = \frac{d}{dr}[Vs[n,r]] \tag{124}$$

Różniczkując odpowienio n-objętości parzysto- (113) i nieparzystowymiarowej (114) n-kuli otzrymujemy:

$$Ps[2m,r] = \frac{2m}{m!} \cdot \pi^m \cdot r^{2m-1} \tag{125}$$

$$Ps[2m+1,r] = \frac{2m+1}{(2m+1)!!} \cdot 2^{m+1} \cdot \pi^m \cdot r^{2m} \tag{126}$$

Co możemy jeszcze nieco uprościć:

$$Ps[2m,r] = \frac{2}{(m-1)!} \cdot \pi^m \cdot r^{2m-1} \tag{127}$$

$$Ps[2m+1,r] = \frac{1}{(2m-1)!!} \cdot 2^{m+1} \cdot \pi^m \cdot r^{2m} \tag{128}$$

Sprawdzając n-powierzchnie n-kul dla $n \leqslant 6$ otrzymujemy:

$$Ps[0,r] = 0 \tag{129}$$

$$Ps[1,r] = 2 \tag{130}$$

$$Ps[2,r] = 2 \cdot \pi \cdot r \tag{131}$$

$$Ps[3,r] = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \tag{132}$$

$$Ps[4,r] = 2 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \tag{133}$$

$$Ps[5,r] = \frac{8}{3} \cdot \pi^2 \cdot r^4 \tag{134}$$

$$Ps[6,r] = \pi^3 \cdot r^5 \tag{135}$$

Nic nie otacza pojedynczy punkt punkt, więc dla (129) mamy 0.
Natomiast odcinek ma 2 końce (punkty), co wynika z (130).
Dalej - dla przypadku 2-wymiarowego mamy obwód koła (131).
Dla „zwykłej" kuli mamy jej „zwykłą" powierzchnię, co otrzymujemy z (132).
Następnie - (133) - to już jest jak dla nas czysta abstrakcja. 4-powierzchnią $s[4,r]$ jest figura o 3-objętości.

3 Zakończenie

Opisany w pracy problem na kilku przykładach ilustruje, że możemy opisać wielowymiarowe figury, których nie można sobie w prosty sposób wyobrazić. Jest on o tyle ciekawy, że w stosunkowo prosty i przejrzysty sposób obliczane są własności n-figur, bez odwoływania się do rysunków pomocniczych.

Literatura

[1] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, PWN, Warszawa 1967, *s. 296-303*

[2] Wojciech Żakowski, *Matematyka Część I*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977, *s. 236-241*

[3] Tomasz Szymczyk, *Tablice matematyczne*, Park, Bielsko-Biała 2000, *s. 99*