

# Tomografia laserowa — rzecz o suwmiarce świetlnej

Radosław Chrapkiewicz, Piotr Migdał

6 marca 2006

## 1 Interferencja — słów i wzorów kilka

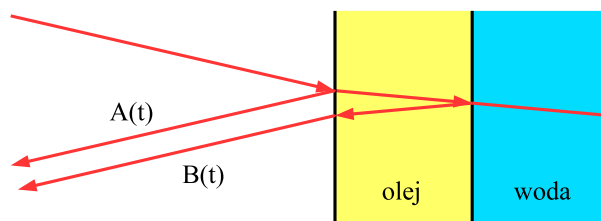
### 1.1 Dwie warstwy

Zastanówmy się nad takim praktycznym problemem. Mamy przezroczyste ciało składające się z równoległych warstw o różnych parametrach. Naszym zadaniem jest wyznaczyć położenie poszczególnych granic między warstwami.

Zacznijmy nasze rozważania od najprostszego przypadku — jednorodnej płytki. Całe zagadnienie się o tyle upraszcza, że wystarczy tylko zmierzyć jej grubość. Co do za problem? Właściwie żaden — sięgamy po suwmiarkę i odczytujemy wynik ze skali. Gdy płytka jest „sensownej” szerokości (dajmy na to, ma 1 cm grubości), pomiar jest nie dość, że szybki, to w miarę dokładny. Czy zatem potrzebujemy do wykonania naszego zadania jakiś innych narzędzi?

Schody zaczynają się, gdy mamy do czynienia z czymś cienkim — precyzja klasycznych narzędzi (włącznie ze śrubą mikrometryczną) może okazać się niezadowalająca. W dodatku, wymagany jest dostęp do obu stron płytki, a także sam dotyk nie może niszczyć kształtu. Prosty przykład ciała spełniającego wszystkie powyższe niepożądane warunki? Bańka mydlana.

Jak Czytelnik mógłby się spodziewać, padnie za chwilę jakiś sposób mierzenia grubości z użyciem światła. Jednak zanim przystąpimy do rzucania pomysłów na oślep, może warto przyjrzeć się jednemu pięknemu zjawisku. Po rozlaniu kropli oleju na kałuży, widzimy charakterystyczne opalizujące kolory. Te tęcze barwy biorą się z interferencji światła odbitego od dwóch warstw.



Rysunek 1: Wiązka światła odbijająca się od plamy oleju na wodzie. Promienie odbite od warstwy powietrze-olej i olej-woda interferują ze sobą.

Światło jest w części odbijane zarówno przez warstwę powietrze-olej, jak i olej-woda. Obie te wiązki interferują ze sobą. Jak na Rysunku 1, amplituda odbitych wiązek to  $A(t)$  i  $B(t)$ . Drogę optyczną światła przechodzącego tam i z powrotem przez olej oznaczmy jako  $2L$  (światło na przebycie niej poświęci  $\frac{2L}{c}$  sekund). Częstość fali to  $\omega$ . Amplituda wypadkowa jest niczym innym jak sumą  $A(t)$  i  $B(t)$ , zatem

$$\begin{aligned} A(t) + B(t) &= a \cos(\omega t) + b \cos(\omega(t + \frac{2L}{c})) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\frac{2L}{c}\omega)} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie  $a$  to amplituda odbicia od powietrze-olej,  $b$  — olej-woda <sup>1</sup>, a  $\varphi$  to pewien kąt (którego wartość nas jakoś szczególnie nie interesuje).

<sup>1</sup>ściślej —  $b$  to iloczyn amplitud: przejścia przez powietrze-olej, odbicia od olej-woda i przejścia przez olej-powietrze

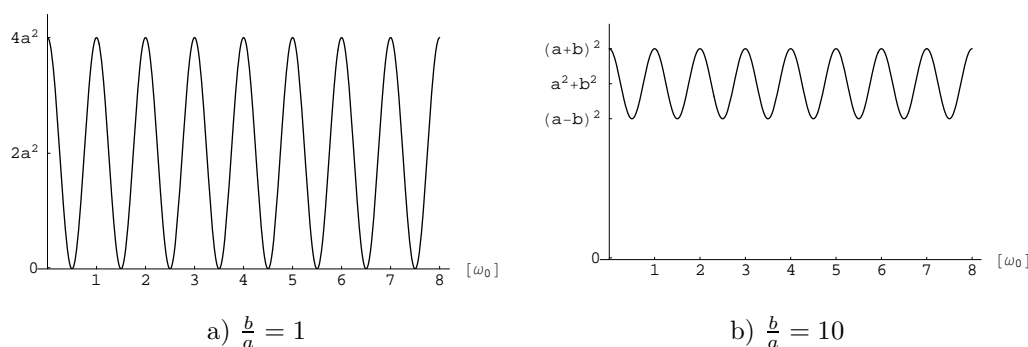
Samej amplitudy nie widzimy, ale za to możemy zobaczyć natężenie wiązki światła. Jest ono proporcjonalne do kwadratu amplitudy uśrednianej po czasie. To natężenie przedstawimy jako funkcję od częstości,  $I_{odb}(\omega)$ . W wyrażeniu  $(A(t) + B(t))^2$  jedynym wyrażeniem zależnym od czasu jest  $\cos^2(\omega t + \varphi)$ , który uśrednia się do  $\frac{1}{2}$ . W efekcie dostajemy

$$I_{odb}(\omega) \propto a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(\frac{2L}{c}\omega\right). \quad (1)$$

A zatem natężenie ma postać *kosinusa* przesuniętego o pewien wyraz stały. Nietrudno zauważyć, że okresem (1) jest

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{2L} = \frac{\pi c}{L}. \quad (2)$$

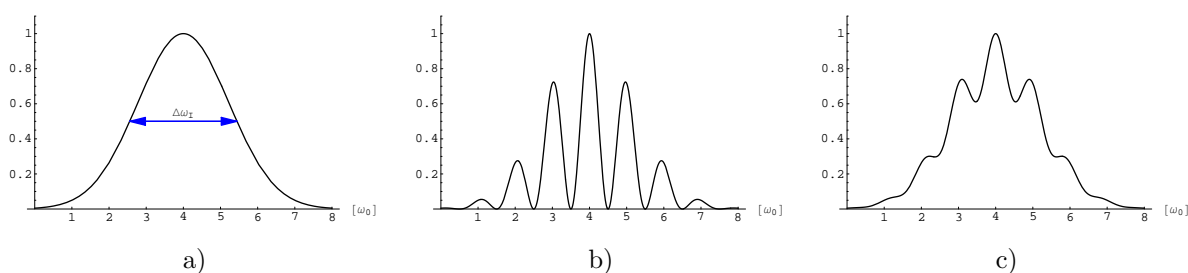
Po puszczeniu wiązki na siatkę dyfrakcyjną, można badać zależność natężenia od częstości. Obserwujemy wygaszenia, dla  $\omega = (n + \frac{1}{2})\omega_0$ , a wzmocnienia dla  $\omega = n\omega_0$ , gdzie  $n$  jest dowolną liczbą naturalną.



Rysunek 2: Natężenie odbijanego światła w funkcji częstości. Warto zwrócić uwagę, że głębokość modulacji jest największa, gdy  $a = b$ .

Dobrze, ale jak na razie otrzymaliśmy coś w rodzaju zależności współczynnika odbicia od częstości. W rzeczywistości źródło, którym oświetlamy próbkę, ma pewne widmo. Mierzone natężenie będzie iloczynem natężenia padającego światła i wcześniej wyliczonej funkcji odbicia  $I_{odb}(\omega)$ .

$$\begin{aligned} I(\omega) &= I_0(\omega)I_{odb}(\omega) \\ &= I_0(\omega) \left( a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(\frac{2L}{c}\omega\right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$



Rysunek 3: Zależność odbijanego natężenia od częstości z uwzględnieniem rzeczywistego widma padającego światła. Rysunek a) przedstawia widmo padającego światła,  $I_0\omega$ , podczas gdy b) i c) to wykresy  $I(\omega)$  dla, odpowiednio, odbijanych natężeń z rysunków 2a i 2b.

Gdy mamy do czynienia z funkcją natężenia taką jak na rysunkach 3a), okres możemy wyliczyć mierząc odległość między kolejnymi maksimumami. W przypadku 3b) sprawa nie wygląda już tak niesamowicie czysto, jednak nie oznacza to jeszcze, że jesteśmy bezsilni — możemy postarać się odjąć od wyniku widmo  $I_0(\omega)$  z odpowiednim współczynnikiem i sprowadzić rzecz do przypadku 3a).

Czy znaczy to, że zawsze potrafimy odcyfrować okres  $\omega_0$ ? Z punktu matematycznego — tak, inżynierskiego — nie koniecznie. Zwróćmy uwagę, że każdy spektrometr, cyfrowy lub analogowy, nie umie mierzyć dowolnie

małych natężeń. Niemniej, widmo  $I_0(\omega)$  na ogół ma pewną szerokość. Na rysunku 3a) przez  $\Delta\omega_I$  oznaczyliśmy tzw. szerokość połówkową widma (czyli odległość między miejscami, w których natężenie osiąga połowę maksymalnej wartości). W prawdzie czasem możemy mierzyć natężenie na szerokości  $2\Delta\omega_I$  czy też nawet  $3\Delta\omega_I$ , lecz dalej to pozostaje ten sam rząd wielkości „dostępnego” przedziału częstości.

Przyjmijmy, że okres  $I_{odb}(\omega)$ , którym jest pewne  $\omega_0$ , możemy zmierzyć, gdy nie jest dużo większy od szerokości  $\Delta\omega_I$ . Tym samym maksymalny dla nas mierzalny okres to  $\omega_{\max} \approx \Delta\omega_I$ . Gdy tylko przekształcimy częstość na odległość, korzystając ze wzoru (2) otrzymujemy minimalną odległość

$$L_{\min} = \frac{\pi c}{\omega_{\max}} \approx \frac{\pi c}{\Delta\omega_I}. \quad (4)$$

Właśnie wyliczona wielkość  $L_{\min}$  ma sens rozdzielczości. Dla żarówki emitującej światło z zakresu widzialnego (tj. od  $400 \text{ nm}$  do  $800 \text{ nm}$ ) otrzymujemy wynik  $400 \text{ nm}$ , czyli  $0,4 \mu\text{m}$ .

## 1.2 Więcej warstw

Co jednak gdy mamy do czynienia z większą liczbą warstw? Tutaj sprawa będzie bardziej skomplikowana. Okazuje się (czego nie będziemy tutaj dowodzić), że modulacja widma będzie pochodziła od interferencji każdej odbitej wiązki z każdą i ma postać

$$I(\omega) = I_0(\omega) \sum_j \sum_k a_j a_k \cos\left(\frac{2(L_j - L_k)}{c} \omega\right), \quad (5)$$

gdzie  $a_i$  to natężenie pola elektrycznego wiązki odbitej na głębokości  $L_i$ . Obie sumy przebiegają po tych samych indeksach, numerowanych liczbami naturalnymi.

Łatwo sprawdzić, że wzór (5) pokrywa się w szczególnym przypadku dwóch wiązek z rozważaniami podsumowanymi w (3) (jeśli tylko przyjąć oznaczenia  $a_0 = a$  i  $a_1 = b$ ).

Co nas może niepokoić, wraz z liniowo rosnącą liczbą warstw, liczba wyrazów w (5) rośnie do kwadratu. Co może nawet gorsze, częstości modulacji biorą się od każdej różnicy odległości.

Aby sobie uprościć życie (przynajmniej w tym wypadku), należy nie tyle zastosować sztuczkę matematyczną czy fizyczną, co raczej inżynierską. „Na siłę” dodajemy silną wiązkę odniesienia, czyli  $a_0 = r$  taką że  $r \gg \sum_j a_j$ . Tym samym piszemy

$$\sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} a_j a_k \ll 2r \sum_k a_k. \quad (6)$$

Dodatkowo przyjmijmy, bez straty ogólności, że  $L_0 = 0$ . Pozwala to nam bardzo ładnie przybliżyć (5)

$$\begin{aligned} I(\omega) &= I_0(\omega) \left( r^2 + 2r \sum_k a_k \cos\left(\frac{2L_k}{c} \omega\right) + \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} a_j a_k \cos\left(\frac{2(L_j - L_k)}{c} \omega\right) \right) \\ &\approx I_0(\omega) \left( r^2 + 2r \sum_{k \neq 0} a_k \cos\left(\frac{2L_k}{c} \omega\right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

## 1.3 „Wyłuskiwanie” $L$ -ów

Pozostało już tylko dotrzeć do współczynników  $a_k$  oraz głębokości  $L_k$  z nimi związanych. Dla naszego pierwszego przypadku, w którym to analizowaliśmy tylko dwie wiązki, sprawa była dość prosta — ograniczała się do znalezienia odległości między lokalnymi minimami oraz zmierzenia głębokości modulacji.

Co jednak zrobić, gdy tych wiązek jest kilka, kilkanaście, a może i więcej? Okazuje się, że problem nie jest trudny, jeśli się tylko posłużyć *transformatą Fouriera*. Jest to operacja która, mówiąc mało ściśle, z danej funkcji wyciąga jej wyrazy typu *sinus*, *kosinus*. W efekcie otrzymujemy funkcję

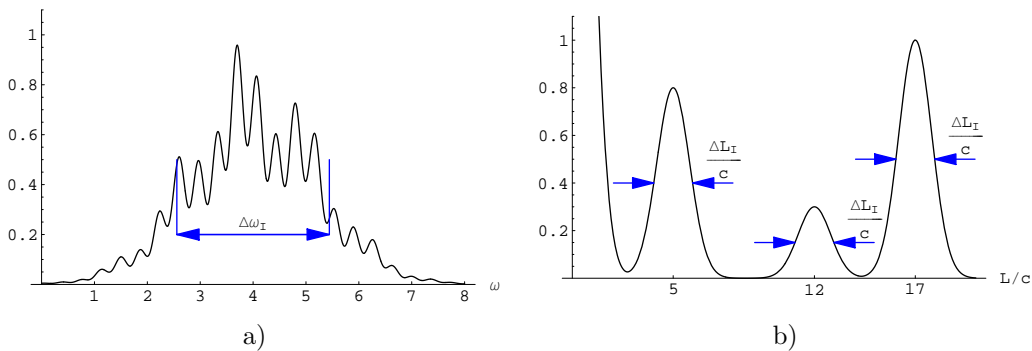
$$J(L) = r^2 J_0(L) + 2r \sum_{k \neq 0} a_k J_0(L - L_k), \quad (8)$$

w której  $J_0(L)$  zależy w pewien sposób od  $I_0(\omega)$ . Ważną względną zależnością tych dwóch funkcji jest fakt, że czym  $J_0(L)$  szersze tym  $I_0(\omega)$  węższe i na odwrót. W istocie zachodzi

$$\Delta L_{J_0} \propto \frac{1}{\Delta \omega_{I_0}}. \quad (9)$$

Nasuujące się podobieństwo do (4) nie jest przypadkiem. Nie powinno nas dziwić, że ogólniejsze prawa działają także dla prostych przypadków (co więcej, gdyby tak nie było, moglibyśmy czuć się naprawdę zagubieni).

Wróćmy jeszcze do samego wzoru (8). Przedstawia on sumę funkcji  $J_0(L)$  przesuniętych o odległości  $L_k$ , pomnożonych odpowiednio przez współczynniki  $a_k$ .



Rysunek 4: Przy pomocy transformaty Fouriera można z widma a) odtworzyć położenia warstw odbijających b).

## 2 Układ doświadczalny

### 2.1 Źródło światła

Teoretycznie, naszym źródłem mogłoby być Słońce albo zwyczajna żarówka. W prawdzie nałożone wymagania szerokiego widma jest spełnione, jednak pamiętajmy, że to nie wszystko. W obu powyższych przypadkach by wiązka była spójna, trzeba ją przepuścić przez odpowiednio wąską szczelinę. W praktyce przekłada się to na ogromny spadek natężenia, co znacznie utrudniłoby pomiary.

Z kolei lasery (ciągłe) emitują wiązkę spójną i skolimowaną, jednak monochromatyczność stanowi przeszkodę — gdy znamy wartość natężenia tylko dla jednej, konkretnej częstotliwości, nie wystarcza to nam do odtworzenia położenia warstw odbijających. Na szczęście istnieją jeszcze lasery impulsowe — łączą one zalety laserów monochromatycznych (spójność i skolimowanie) z zaletami, niech nam będzie, żarówki (szerokie widmo). Dodatkowo, jak nazwa sugeruje, świecą (a raczej błyskają) impulsami. Pozwala to badać także ruchome przedmioty.

### 2.2 Pomiar widma

Najważniejszą rzeczą, jaką musimy zmierzyć, jest funkcja natężenia od częstotliwości  $I(\omega)$ . Tutaj wystarczy tylko puścić wiązkę na siatkę dyfrakcyjną, po czym zmierzyć moc promieniowania padającego na ekran w zależności od położenia.

W rzeczywistości całą to „czarną robotę” wykonuje za nas spektrometr cyfrowy. Idąc dalej, musimy obliczyć funkcję  $J(L)$ . W tym celu napisaliśmy procedury w programie *LabVIEW*, które tłumaczą  $I(\omega)$  na  $J(L)$  w czasie rzeczywistym.

W takim razie sprawa wygląda na bezproblemową i, co pewnie ważniejsze, taką jest.

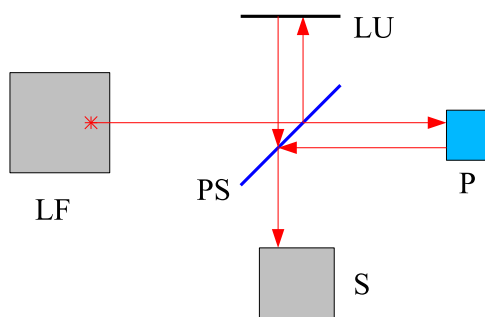
## 2.3 Wiązka odniesienia

Postulowaliśmy dodanie wiązki odniesienia. Jak jednak tego dokonać — nie możemy wstawić niczego przed (każda rzecz ma co najmniej dwie warstwy), tym bardziej za naszym badany układ. Równie chybiony wydaje się być pomysł pomalowania próbki czymś odbłaskowym.

Nic nie stoi za to na przeszkodzie by rozdzielić wiązkę na dwie (przy pomocy płytki światłodzielnej) i jedną wiązkę puścić na próbkę, a drugą na lustro, po czym je połączyć. W zasadzie najprostszym rozwiązaniem jest tutaj użycie interferometru dwuramiennego zwanego także *interferometrem Michelsona-Morleya*.

## 2.4 I oto nasz układ!

Teraz już bez obaw możemy złożyć nasz cały układ.



Rysunek 5: Układ doświadczalny. LS - laser femtosiekundowy (źródło światła), PS - płytka światłodzielna, P - próbka, LU - lustro, S - spektrometr.

Jak wynika z rysunku, wiązka wychodzi z lasera, po czym pada na płytkę światłodzielną. Dwie powstałe wiązki biegną w dwóch ramionach (jednym z próbką, drugim z lustrem) po czym zostają połączone. Taka końcowa wiązka pada na spektrometr i jest cyfrowo analizowana.

Wszystko wygląda ładnie, ale czy rzeczywiście omawianą metodą można coś zbadać? Przypatrzmy się wynikom.

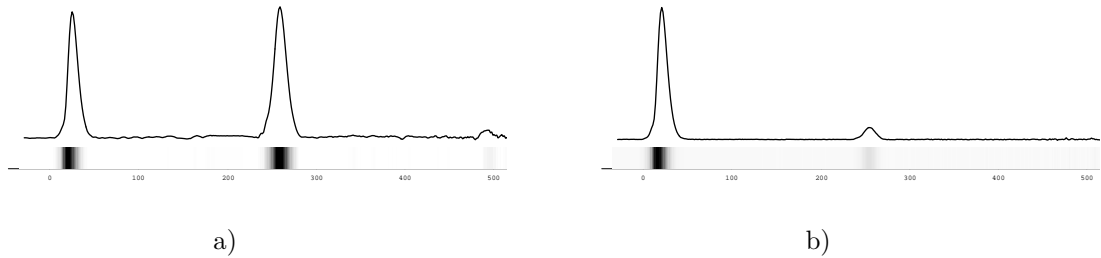
## 3 Wyniki

### 3.1 Płytkę z olejem immersyjnym

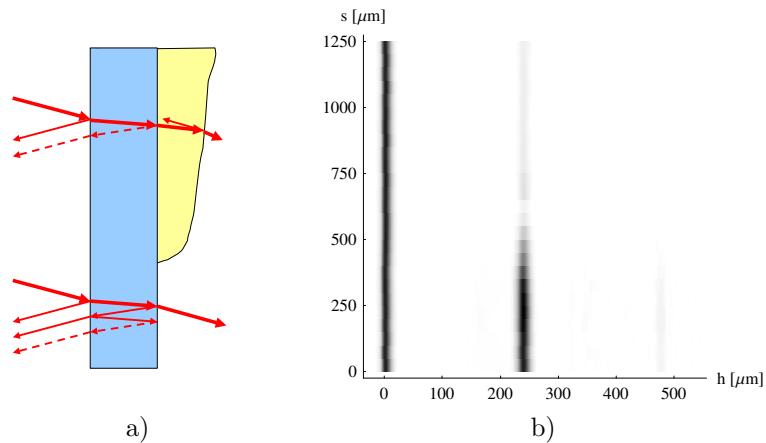
Jednym z najprostszych układów, jakie możemy badać jest cienka płytka szklana. Powinniśmy zaobserwować wiązki odbite od pierwszej granicy (powietrze-szkło) i drugiej (szkło-powietrze), obie o porównywalnym natężeniu. Być może będzie dało się też zobaczyć, dość słabe, wielokrotne odbicia.

Co by się jednak stało, gdyby tylną powierzchnię posmarować olejem o współczynniku załamania porównywalnym ze współczynnikiem załamania szkła? Na pewno odbicie od drugiej granicy (tym razem szkło-olej) stało by się dużo słabsze (nie mówiąc już o wielokrotnych odbiciach). Nie możemy zakładać, że zaobserwujemy odbicie od dodatkowej powierzchni — olej-powietrze, gdyż najzwyczajniej olej może być ustawiony krzywo i odbijać światło w kierunku innym niż równoległy do padającej wiązki.

Jak widzimy, dane doświadczalne zebrane omawianą metodą (Rys. 6) w istocie pokrywają się ze wstępnymi rozważeniami. Teraz możemy pokusić się na więcej — zrobienie „mapy” szkiełka z naniesioną kropelką oleju. W tym celu robimy nasze pomiary dla różnych miejsc płytki, przesuując się po linii.



Rysunek 6: Płytkę szklaną: a) czystą, b) z naniesionym olejkiem immersyjnym.

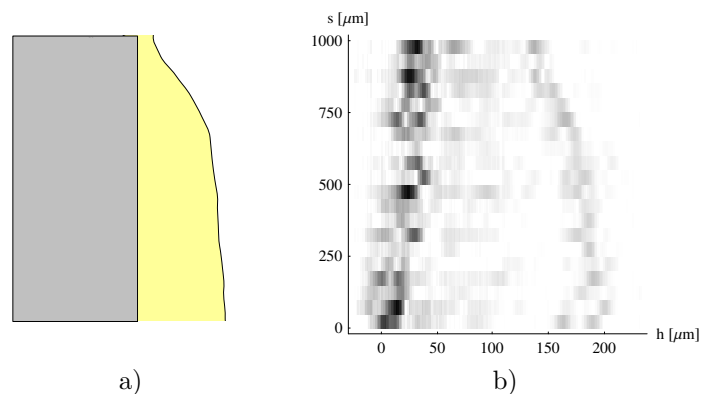


Rysunek 7: Mapa płytki szklanej z kroplą oleju: a) rysunek schematyczny, b) dane doświadczalne.

W istocie dostaliśmy to samo, co wcześniej. Cała mapa dzieli się na dwa obszary - ten z olejem i ten bez.

### 3.2 Olej na papierze

Teraz przechodzimy do nieznacznie bardziej skomplikowanego układu. Nanosimy kroplę oleju na papier, po czym skanujemy tworząc mapę.

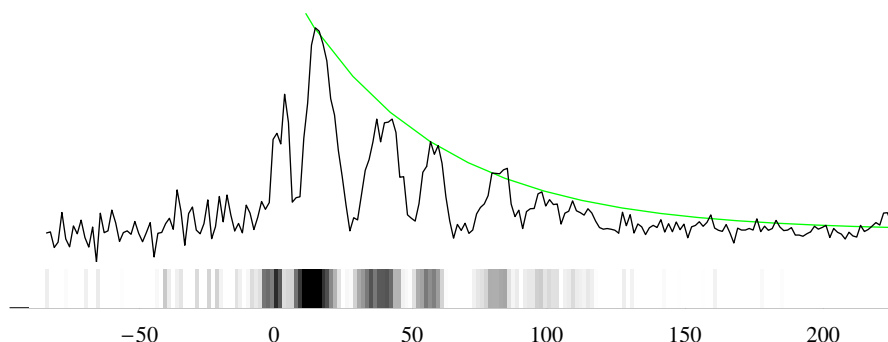


Rysunek 8: Mapa papieru z kroplą oleju po jednej stronie: a) rysunek schematyczny, b) dane doświadczalne.

Kartka papieru przede wszystkim tym różni się od szkła, że rozprasza w całej swojej objętości. Ten fakt powoduje, że granic odbicia w papierze z olejem (Rys. 8) mają inny charakter niż te w płytce szklanej (Rys. 7). W szczególności, na całej szerokości papieru widzimy odbicia. Za nią znajduje się nieodbijająca warstwa oleju zakończona powierzchnią olej-powietrze.

### 3.3 Białe winogrono

Czemu jednak nie zająć się czymś, czego struktury nie znamy? Weźmy np. białe winogrono i zobaczmy co wyjdzie.



Rysunek 9: Białe winogrono jako próbka.

Otrzymaliśmy serię odbić, z malejącymi natężeniami (jeśli tylko wyjąć to pierwsze). Jako, że raczej nie spodziewamy się, by winogrono znacząco zmieniało się w środku, możemy przyjąć że spadek natężeń wiązek odbitych wiąże się z pochłanianiem i rozpraszaniem w miąższu. Czym dalej wiązka wnika, tym staje się słabsza. A zatem, jeśli tylko przyjąć że wewnątrz winogrona jest w miarę jednorodne (tzn. każdy cienki wewnętrzny obszar pochłania tak samo), a warstwy odbijające — do siebie podobne, spadek natężenia wraz z głębokością powinien być *eksponencjalny*. I taki też (w odpowiednim przybliżeniu) się okazuje, co jest zaznaczone krzywą narysowaną na Rys. 9.

## 4 Podziękowania

Chcielibyśmy serdecznie podziękować prof. dr hab. Czesławowi Radzewiczowi wraz z doktorantami za opiekę naukową, przekazaną wiedzę oraz udostępnienie laboratorium. Wyrażamy także wdzięczność Wydziałowi Fizyki UW oraz Krajowemu Funduszowi na rzecz Dzieci za umożliwienie nam wzięcia udziału w warsztatach.